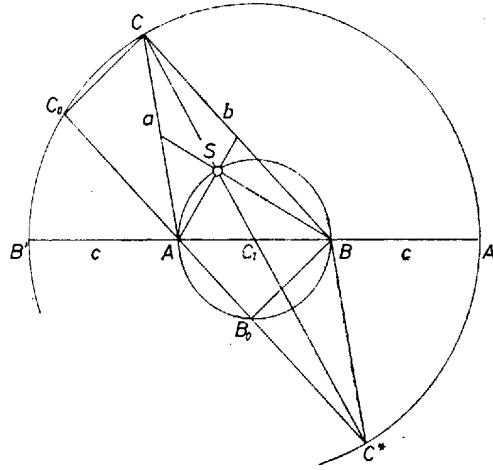


Legyenek az ABC háromszögnek az A és B csúcsából kiinduló súlyvonalai merőlegesek egymásra. Így közös pontjukból, az S súlypontból az AB oldalt derékszögben látjuk, S rajta van az AB átmérőjű Thalész-kör kerületén, tehát S -nek az $AB = c$ oldal C_1 felezőpontjától való távolsága egyenlő az oldal felével: $SC_1 = AB/2$. És mivel S harmadolja a C_1C súlyvonalat, azért $C_1C = 3AB/2$, vagyis C rajta van a C_1 körüli $s_c = 3c/2$ sugarú körön. – Meggondolásunk megfordítható, a feltétel tehát nemcsak szükséges, hanem elégséges is.



A $CC_1 = s_c$ súlyvonal bármely háromszögben egyszerűen kifejezhető a három oldallal, így az előbbi helyzetfeltételt átalakíthatjuk a háromszög oldalai közti méretes feltétellé. Legyen C tükörképe C_1 -re C^* , ekkor a CAC^*B paralelogramma átlói és oldalai között fennáll:¹

$$\begin{aligned} CC^{*2} + AB^2 &= AC^2 + CB^2 + BC^{*2} + C^*A^2, \\ 4s_c^2 + c^2 &= 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

Ez esetünkben a feltétel a talált $2s_c = 3c$ alakja alapján így specializálódik:

$$(1) \quad 5c^2 = a^2 + b^2,$$

és ez ugyancsak szükséges és elegendő az a, b, c oldalakkal meghatározott háromszög a és b oldalaihoz tartozó súlyvonalak merőlegességéhez.

Megjegyzés. Abból, hogy a vizsgált háromszögekben C rajta van a C_1 körüli $3c/2 = 3 \cdot AC_1 = 3BC_1$ sugarú körön, következik, hogy a további két oldal nagyságra nézve c és $2c$ közé esik: $c < a, b < 2c$, hiszen a körnek az AB egyenesen levő, A -hoz legközelebbi B' és A -tól legtávolabbi A' pontjára $B'A = AB = BA' = c, AA' = 2c$, és ha C egybeesnék B' -vel, A' -vel, akkor már nem jönne létre valódi háromszög.

Mégsem kell a talált (1) feltétel mellé még azt is kikötnünk, hogy c a háromszög legrövidebb oldala legyen. Ha ugyanis pl. $a = \vartheta c$ lenne, ahol $0 < \vartheta \leq 1$ akkor (1)-ből

$$b^2 = (5 - \vartheta^2)c^2 \geq 4c^2, \quad b \geq 2c,$$

és ekkor a, b, c oldalakkal nem szerkeszthető háromszög, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, hiszen $b \geq a + c$.

¹ A felhasznált segédtevélt úgy kapjuk, hogy Pitagorasz tételét alkalmazzuk a $CC^*C_0, ABB_0, ACC_0, BC^*B_0$ derékszögű háromszögekre, ahol B_0, C_0 a B, C csúcs vetülete az AC^* egyenesen.