

$$(1) \quad \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 5 > 4.$$

I. megoldás. Alkalmazva a $(\log_a b) \cdot (\log_b c) = \log_a c$ azonosságot, valamint a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget, azonnal láthatjuk, hogy

$$\log_5 6 + \log_6 7 \geq 2 \cdot \sqrt{\log_5 6 \cdot \log_6 7} = 2 \cdot \sqrt{\log_5 7},$$

illetve

$$\log_7 8 + \log_8 5 \geq 2 \cdot \sqrt{\log_7 8 \cdot \log_8 5} = 2 \cdot \sqrt{\log_7 5}.$$

Ismét alkalmazva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\log_5 6 + \log_6 7) + (\log_7 8 + \log_8 5) &\geq 2 \cdot \sqrt{\log_5 7} + 2 \cdot \sqrt{\log_7 5} \geq \\ &\geq 4 \cdot \sqrt{\sqrt{\log_5 7} \cdot \sqrt{\log_7 5}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\log_5 7 \cdot \log_7 5} = 4. \end{aligned}$$

Ezzel éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kaptuk meg ha még igazoljuk, hogy az utolsó egyenlőtlenség helyett szigorú egyenlőtlenséget írhatunk. Valóban $a > b > 1$ esetén $\log_b a > 1 > \log_a b$, azaz

$$2\sqrt{\log_5 7} > 2 > 2\sqrt{\log_7 5},$$

és két pozitív szám számtani és mértani közepe csak akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő; egyébként mindig a számtani közép a nagyobb.

II. megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $a > b > 1$, $x > 1$, úgy

$$\log_a x < \log_b x.$$

Ezt használjuk fel az (1) egyenlőtlenség igazolására.

(1) tagjait átalakítva az

$$\log_5 6 = \log_5 \left(5 \cdot \frac{6}{5} \right) = 1 + \log_5 \frac{6}{5}$$

egyenlőség mintájára, azt kapjuk, hogy elegendő igazolnunk a következőt:

$$(2) \quad \log_5 \frac{6}{5} + \log_6 \frac{7}{6} + \log_7 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{5}{8} > 0.$$

Az előrebecsátottak szerint, ha mindenütt 8-as alapra térünk át, (2) bal oldalánál határozottan kisebbet kapunk:

$$\begin{aligned} \log_5 \frac{6}{5} + \log_6 \frac{7}{6} + \log_7 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{5}{8} &> \log_8 \frac{6}{5} + \log_8 \frac{7}{6} + \log_8 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{5}{8} = \\ &= \log_8 \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{5}{8} = 0, \end{aligned}$$

amit igazolni akartunk.

Megjegyzés. Több megoldó a bizonyítandó egyenlőtlenséget úgy igazolta, hogy kiszámította a bal oldal értékét és azt 4-nél valamivel nagyobbobbnak találta. Ilyen megoldást is teljes értékűnek fogadtunk el akkor, ha a dolgozat mind a függvénytáblázatbeli, mind a számításakor előforduló esetleges kerekítési hibákat figyelembe véve igazolta az egyenlőtlenséget.