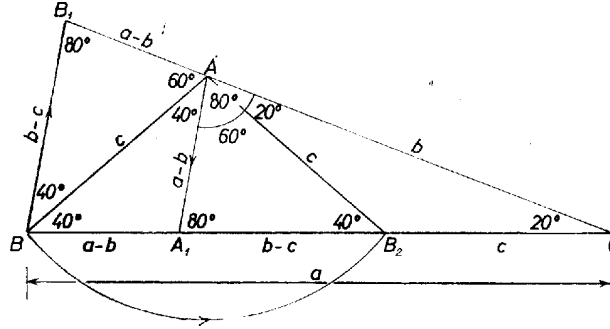


$$(1) \quad bc^2 = (a+b)(a-b)^2.$$

I. megoldás. A feltevések szerint $\beta = 2\gamma$ és $\alpha = 6\gamma$, tehát a szögek összegéből $\gamma = 20^\circ$, majd $\beta = 40^\circ$, $\alpha = 120^\circ$.

Fordítsuk rá C körül A -t a CB félegyenesre A_1 -be és B -t a CA -ra, B_1 -be, továbbá A körül B -t a BC -re, a B_2 pontba (1. ábra).



1. ábra

Így CAA_1 , CBB_1 , ABB_2 egyenlő szárú háromszögek, az ezekből kiadódó szögértékek alapján egyszerű számítás szerint a B_2CA és A_1AB háromszög is egyenlő szárú: $BB_2A_1 = 40^\circ$, a külső szög tétele alapján $B_2AC = 40^\circ - \gamma = 20^\circ = \gamma$, illetve $CA_1A = 80^\circ$, $A_1AB = 80^\circ - \beta = 40^\circ = \beta$.

Továbbá az ABB_1 és AB_2A_1 háromszögek szögei (a csúcsok felsorolásának rendjében) páronként egyenlők: 60° , 40° , 80° .

A szerkesztésünk és számításunk szerint egyenlő szakaszok: $BA_1 = B_1A = AA_1 = a - b$ és $AB = AB_2 = B_2C = c$, így az ABB_1 és AB_2A_1 háromszögek egybevágók, ezért $B_1B = A_1B_2 = CA_1 - CB_2 = b - c$, továbbá $BB_2 = a - c$.

Mármost a CAA_1 , CB_1B , majd az ABB_2 , A_1AB háromszögpárok hasonlósága alapján, megfelelő oldalpárjaik arányából

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b}{a}, \quad \text{illetve} \quad \frac{a-c}{c} = \frac{c}{a-b}.$$

Ezekből – egy kis előrelátó ügyeskedéssel – az (1) bal oldalának tényezőire a következőket írjuk fel:

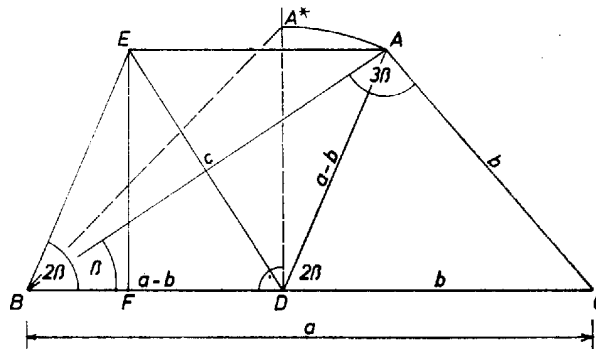
$$b = \frac{a^2 - b^2}{a - c}, \quad \text{illetve} \quad c^2 = (a - c)(a - b);$$

innen ugyanis a jobb oldalak szorzata azonnal egyenlőnek adódik az (1) jobb oldalával. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az ABC háromszög köré írt k körből az AB , BC , CA oldal által lemetsett ív a középpontból rendre $2\gamma = 40^\circ$, $2\alpha = 240^\circ = 6 \cdot 40^\circ$, $2\beta = 2 \cdot 40^\circ$ szögben látható. És mivel 40° -os középponti szög tartozik a k -ba beírt $1 + 6 + 2 = 9$ oldalú szabályos sokszög oldalaihoz is, azért A , B és C annak a szabályos 9-szögnek a csúcsai közül valók, amelynek oldalhossza c ; ekkor egy csúcsát a tőle második, illetve harmadik csúccsal összekötő átló hossza b , ill. a .

II. megoldás. Ha a fentieknél kissé több számítást engedünk meg magunknak, és felhasználjuk a hegyesszög cosinusának definícióját, akkor (1) bizonyításához elég a feltevésnek az $\alpha = 3\beta$ része. Az $\alpha + \beta < 180^\circ$ kapcsolat miatt természetesen $\beta < 45^\circ$. (Valóban, $\beta = 30^\circ$ és $b = 1$ mellett $a = 2$, $c = \sqrt{3}$, és teljesül az állítás.)

Mérjük fel ismét CA -t a CB félegyenesre: $CD = CA$, így D a CB szakaszon van, hiszen $\alpha > \beta$ miatt $a > b$, azaz $CB > CA$ (2. ábra).



2. ábra

Mivel $\gamma = 180^\circ - 4\beta$, azért $\angle CAD = \angle CDA = 2\beta$, tehát $\angle DAB = \beta = \angle DBA$, ennélfogva $DA = DB = a - b$. Így a CAD és a DAB háromszögből.

$$(2) \quad \cos 2\beta = \frac{a-b}{2b}, \quad \text{illetve} \quad \cos \beta = \frac{c}{2(a-b)}.$$

Legyen még D -nek AB -re való tükörképe E , és E -nek BD -n levő vetülete F . Ekkor $\angle EBD = 2\beta$, és a $BEAD$ rombusz területének kétféle kifejezéséből

$$\begin{aligned} EF &= \frac{AB \cdot DE}{2BD} = \frac{AB}{BD} \sqrt{BD^2 - \frac{AB^2}{4}}, \\ BF^2 &= BE^2 - EF^2 = BE^2 - AB^2 + \frac{AB^4}{4BD^2} = \\ &= \frac{1}{4(a-b)^2} \{c^4 - 4c^2(a-b)^2 + 4(a-b)^4\}, \\ (3) \quad \cos 2\beta &= \frac{BF}{BE} = \frac{c^2 - 2(a-b)^2}{2(a-b)^2} = 2 \left(\frac{c}{2(a-b)} \right)^2 - 1. \end{aligned}$$

A négyzetgyök előjelét helyesen vettük, mert $\beta < 45^\circ$ miatt $BA > BA^*$, ahol A^* az A ráforgatottja a D -ben emelt merőlegesre, tehát $c > \sqrt{2}(a-b)$.

A bal oldalon (2) első kifejezését helyettesítve, kellő alakítás után (1)-et kapjuk.

Jónás Béla (Budapest, Berzsényi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ennek a bizonyításnak az ötlete abból adódhat, ha valaki megpróbálja megfordítani a tételt. Az (1) összefüggés feltevéséből azonban már eleve nem várható, hogy két kapcsolatot kapjunk a szögek között. A megfordítás így hangzik: ha egy háromszögben fennáll (1), akkor $\alpha = 3\beta$. Ez több geometriai számítással igazolható. A dolgozatok jelentős részében az eredeti feltevés melletti bizonyításnak is geometriai azonosságok az eszközei.

2. (3) jobb oldalába (2) második kifejezését írva, a goniometriából ismert $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1$ azonosságot kapjuk, de csak a $0^\circ < \beta < 45^\circ$ korlátozással.