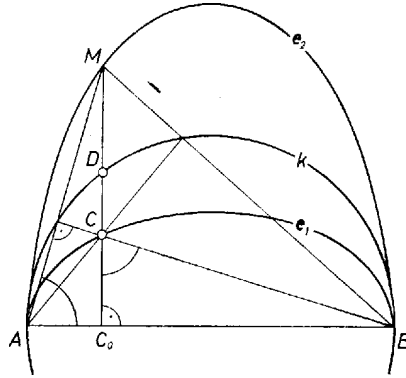


I. megoldás. 1. Legyen az ABC háromszög AB oldala az adott e_1 ellipszis nagytengelye, C csúcsa az e_1 tetszőleges pontja, A és B kivételével, és a háromszög magasságpontja M . Ekkor a CM magasságvonal az AB egyenest egy az A és B közti C_0 pontban metszi, CAC_0 és CBC_0 hegyesszögek. Jelöljük k -val az $AB = 2a$ szakasz mint átmérő fölötti Thalész-kört, D -vel k -nak a C_0C félegyenesen levő pontját és $2b$ -vel ellipszisünk kistengelyének hosszát. Ekkor minden egyes C pont a belőle származtatott D -nek a képe abban a merőleges affinitásban (összenyomásban), melynek tengelye az AB egyenes, arányszáma a $b/a = \lambda$ szám, amelyre $0 < \lambda \leq 1$.



Mivel $MA \perp BC$, azért az MAC_0 és BCC_0 szögek – mint merőleges szárú hegyesszögek – egyenlők; másrészt nyilván $AD \perp DB$. Előbb az MAC_0 , BCC_0 , majd a BDC_0 , DAC_0 derékszögű háromszögpár hasonlósága alapján

$$\frac{MC_0}{AC_0} = \frac{BC_0}{CC_0} = \frac{BC_0}{\lambda \cdot DC_0} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{DC_0}{AC_0},$$

amibó1

$$MC_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot DC_0 = \frac{a}{b} \cdot DC_0.$$

Eszerint az M pont a D -ből $a/b (\geq 1)$ arányú nyújtással származik. Ezzel tulajdonképpen azt is kimondtuk, hogy M ugyanazon a partján van AB -nek, mint C , ezt azonban még igazolnunk kell. Valóban, C a k belsejében van, ezért az ACB szög tompaszög, és így az A -ból, B -ből induló magasságvonalak az ACB szög csúcsszögtartományában metszik egymást.

Mivel C előírt mozgása folyamán D bejárja k -nak minden pontját, azért M mindig rajta van a k -ból az AB tengelyű, a/b arányszámú nyújtással származó vonalon (magát A -t és B -t természetesen kivéve). Fordítva, ennek a vonalnak bármely M^* pontja előáll egy ABC^* háromszög magasságpontjaként, ehhez C^* -ot az M^* -ból AB -re bocsátott merőleges metszi ki e_1 -ből, AB -nek az M^* -ot tartalmazó partján. A keresett mértani hely tehát a k kör képe a mondott nyújtásban. – Ez nyilvánvalóan egy e_2 ellipszis, amelynek kistengelye az AB szakasz, nagytengelye $AB \cdot (a/b) = 2a^2/b$. – Mivel így e_2 -ben a szimmetriatengelyek aránya ugyanaz, mint e_1 -ben, azért ezt is mondhatjuk: M mértani helye forgatva nyújtással áll elő e_1 -ből, a forgatás szöge 90° , a nyújtás aránya a/b , de A és B nem tartozik hozzá a mértani helyhez. Még másképpen: mivel k az e_1 -ből és e_2 is a k -ból (a/b) arányú (és ugyanazon irányú) nyújtással keletkezik, azért – a k kör közvetítő szerepét kiiktatva –: e_2 az e_1 ből az AB -re merőleges, $(a/b)^2$ arányú nyújtással áll elő.

2. Azt az esetet, ha a beírt háromszög rögzített oldala az adott ellipszis kistengelye, visszavezethetjük eredményünkre, annak figyelembevételével, hogy ha az ABC háromszög magasságpontja M , akkor az ABM háromszög magasságpontja C . Valóban, e_2 -t tekintve adótnak, és ha ABM az e_2 -be beírt háromszög, ahol AB az e_2 -nek kistengelye. Így pedig C az e_1 -et írja le, ami a kistengely mint átmérő fölötti Thalész-kör képe abban az affinitásban, melynek tengelye e_2 kistengelye, arányszáma pedig a rögzített oldal és a rá merőleges szimmetriatengely aránya. – Az arányszám ilyen értelmezése mellett az eredménynek a fenti, forgatva-nyújtásos származtatása ebben az esetben is érvényes.

3. Az $a = b$, azaz $\lambda = 1$ esetben e_1 körre (k -vá) specializálódik, nincsenek kiemelt szimmetriatengelyek, e_2 azonos e_1 -gyel. Ez a semmitmondó eredmény azt fejezi ki, hogy ekkor a beírt ABC háromszögben C -nél derékszög van, és a háromszög magasságpontja azonos C -vel.

Major Zoltán (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Vegyünk alapul az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű ellipszist, a beírt ABC háromszög A csúcsának a $(-a, 0)$, B -nek az $(a, 0)$, C -nek az (u, v) pontot, az utóbbira tehát teljesül

$$(1) \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad \text{és} \quad |u| \neq a.$$

Ekkor az M magasságpont abszcisszája a C -ből induló magasságvonal révén u . Az AC egyenes iránytangense $v/(v+a)$, így a B -ből induló magasságvonal egyenlete

$$y = -\frac{u+a}{v}(x-a),$$

tehát M ordinátája. $x = u$ helyettesítéssel, majd (1) alapján u -t kiküszöbölve

$$(2) \quad y_M = -\frac{u^2 - a^2}{v} = \frac{1}{v}(a^2 - u^2) = \frac{a^2}{b^2}v.$$

Ebből ugyanúgy olvashatjuk ki M mértani helyének leírását, mint az I. megoldásban. Vagy pedig, (2)-ből (1) alapján v -t kiküszöbölve és $u = x_M$ átírással a mértani hely egyenlete

$$y_M = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x_M^2},$$

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{(a^2/b)^2} = 1, \quad \text{és} \quad |x_M| \neq a.$$

Mármost, a szokásos $a > b$ nagyságviszonyt tekintve, az az eset áll előttünk, amikor a beírt háromszög rögzített oldala az ellipszis nagytengelye. A számításban azonban ezt nem használtuk fel, az $a < b$ esetre is érvényes, így egy csapásra azt az esetet is elintéztük, amelyben a kistengelyt rögzítjük a háromszög oldalának.

Szabó Kálmán (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Ajánljuk az érdeklődőknek a feladat módosításának a megvizsgálását arra az esetre, ha a beírt háromszög egyik oldala az adott ellipszisnek *tetszőleges*, rögzített átmérője.