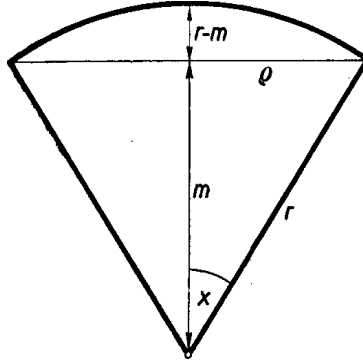


I. megoldás: a) Archimedes ismeretes törvénye alapján, a gömbcikk súlya megegyezik a vízbe merülő térfogatrész (jelen esetben a forgáskúp) által kiszorított víz súlyával. Ha a gömbcikk köbtartalmát K -val, a forgáskúp köbtartalmát K' -vel jelöljük, akkor (mivel a víz fajsúlya 1)

$$(1) \quad K \cdot s = K' \cdot 1.$$

Ábránk a gömbcikk tengelymetszetét és egyben a betűzést mutatja.



Eszerint

$$K = \frac{2r^2\pi(r-m)}{3}, \quad K' = \frac{\varrho^2\pi m}{3}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve és $\frac{\pi}{3}$ -dal egyszerűsítve

$$(2) \quad 2r^2(r-m)s = \varrho^2 m.$$

Ha az itt szereplő ϱ és m mértékszámokat r -rel, és a forgáskúp x félnyílásával fejezzük ki:

$$\varrho = r \sin x, \quad m = r \cos x,$$

és így $r - m = r(1 - \cos x)$, akkor nyerjük, hogy

$$2sr^3(1 - \cos x) = r^3 \sin^2 x \cos x.$$

$\sin^2 x$ helyébe $1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$ -et írva és mindkét oldalt $r^3(1 - \cos x)$ -szel egyszerűsítve ($0 < x < \frac{\pi}{2}$ miatt $1 - \cos x \neq 0$)

$$2s = \cos x + \cos^2 x, \quad \text{vagyis} \quad \cos^2 x + \cos x - 2s = 0.$$

Mivel $0 < x < \frac{\pi}{2}$, azért csak a pozitív gyöknek van értelme. Tehát

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8s}}{2}.$$

b) A feladat megoldható, ha

$$0 < \frac{\sqrt{1 + 8s} - 1}{2} < 1,$$

amiből

$$1 < \sqrt{1 + 8s} < 3, \quad \text{azaz} \quad 0 < s < 1,$$

vagyis a megoldhatóság feltétele megegyezik a fizikából ismert általános úszási feltétellel.

c) $s = 0,75$ esetén

$$\cos x = \frac{\sqrt{7} - 1}{2} \approx 0,8229, \quad \text{és így} \quad x = 34^\circ 37'.$$

Argay Gyula (Balassagyarmat, Balassi B. g. III. o. t.)

II. megoldás: Pythagoras tétele alapján

$$\varrho^2 = r^2 - m^2.$$

Ezen értéket (2)-be helyettesítve és $(r - m)$ -mel egyszerűsítve

$$2r^2 s = (r + m)m,$$

m szerint rendezve a következő másodfokú egyenlet adódik

$$m^2 + rm - 2r^2s = 0.$$

Ennek pozitív gyöke

$$m = \frac{\sqrt{1+8s}-1}{2}r.$$

A megoldhatóság feltétele most

$$0 < \frac{\sqrt{1+8s}-1}{2}r < r,$$

amiből ugyancsak a $0 < s < 1$ feltételt kapjuk.

A kúp félnyílására

$$\cos x = \frac{m}{r} = \frac{\sqrt{1+2s}-1}{2}.$$

adódik, mint az I. megoldásban.

Pogány Eörs (Bp., V., Eötvös J. g. III. o. t.)