

I. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszög súlyvonalai az oldalakkal a következőképpen fejezhetők ki (II. oszt. gimn. tankönyvön kívül lásd K. M. L. VII. kötet, 3–4. szám. 1953. nov. 510. feladat 88–89. oldal):

$$(3) \quad \begin{aligned} s_a &= \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \\ s_b &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \\ s_c &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

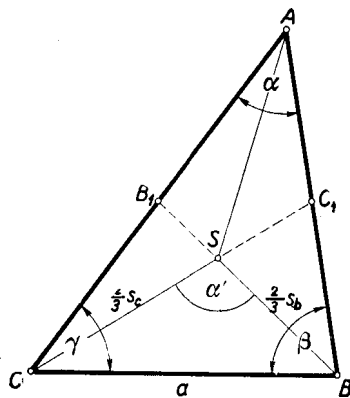
A cosinus-tétel alapján

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

és így

$$(4) \quad \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4t},$$

ahol t a háromszög területe (1. ábra).



1. ábra

A (4) összefüggést a BCS_{Δ} -ben α' -re alkalmazva, (3) figyelembevételével

$$(5) \quad \begin{aligned} \cotg \alpha' &= \frac{\left(\frac{2}{3}s_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}s_c\right)^2 - a^2}{4 \cdot \frac{t}{3}} = \frac{4s_b^2 + 4s_c^2 - 9a^2}{12t} = \\ &= \frac{(2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2) - 9a^2}{12t} = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12t}. \end{aligned}$$

Másrészt (4) alapján

$$2 \cotg \beta + 2 \cotg \gamma = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2t} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2t} = \frac{a^2}{t},$$

és így (5) felhasználásával

$$\begin{aligned} \cotg \alpha - (2 \cotg \beta + 2 \cotg \gamma) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4t} - \frac{4a^2}{4t} = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{4t} = 3 \cotg \alpha'. \end{aligned}$$

Ezzel az (1) összefüggést bebizonyítottuk.

(5) alapján

$$(6) \quad \begin{aligned} \cotg \alpha' + \cotg \beta' + \cotg \gamma' &= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2 + a^2 + c^2 - 5b^2 + a^2 + b^2 - 5c^2}{12t} = \\ &= \frac{-3a^2 - 3b^2 - 3c^2}{12t} = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}. \end{aligned}$$

(4) alapján

$$(7) \quad \cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4t} =$$

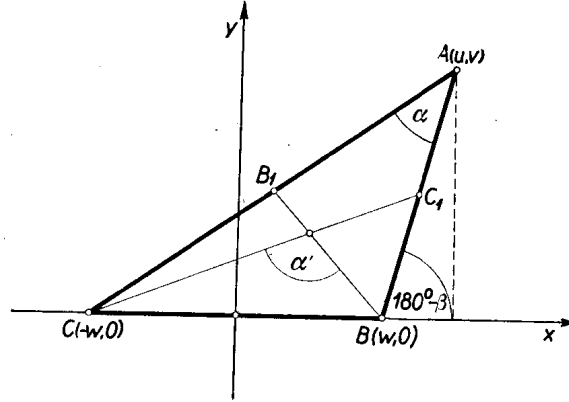
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}.$$

(6) és (7) összevetéséből következik a bizonyítandó (2) összefüggés.

Ádám Antal (Bp., VIII., Széchenyi g. III. o. t.)

II. megoldás: A súlyvonalak és oldalak közötti összefüggés, valamint a cosinus-tétel felhasználása nélkül is bizonyítható tételünk.

Helyezzük el az ABC háromszöget egy derékszögű koordináta-rendszerben, amint azt a 2. ábra mutatja.



2. ábra

A BA egyenes irányhatározója $m_1 = \frac{v}{u-w}$, a CA egyenesé $m_2 = \frac{v}{u+w}$, tehát az általuk bezárt α szögre

$$\cotg \alpha = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2} = \frac{1 + \frac{v^2}{(v-w)(v+w)}}{\frac{v}{u-w} - \frac{v}{u+w}} = \frac{u^2 - w^2 + v^2}{v(u+w) - v(u-w)} = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2vw}.$$

Az ábráról közvetlenül leolvasható:

$$\cotg \beta = -\cotg(180^\circ - \beta) = -\frac{u-w}{v}, \quad \cotg \gamma = \frac{u+w}{v},$$

tehát

$$(8) \quad \cotg \alpha - 2 \cotg \beta - 2 \cotg \gamma = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2vw} + \frac{2u-2w}{v} - \frac{2u+2w}{v} =$$

$$= \frac{u^2 + v^2 - w^2 + 4uw - 4w^2 - 4uw - 4w^2}{2vw} = \frac{u^2 + v^2 - 9w^2}{2vw}.$$

A B_1 és C_1 oldalfelezőpontok koordinátái: $\left(\frac{u-v}{2}, \frac{v}{2}\right)$, ill. $\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v}{2}\right)$, és így a BB_1 , ill. CC_1 súlyvonalak iránytangensei

$$m'_1 = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{u-v}{2} - w} = \frac{v}{u-3w}, \quad m'_2 = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{u+v}{2} + w} = \frac{v}{u+3w}.$$

Tehát az általuk bezárt α' szögre

$$(9) \quad \cotg \alpha' = \frac{1 + m'_1 m'_2}{m'_1 - m'_2} = \frac{1 + \frac{v^2}{(u-3w)(u+3w)}}{\frac{v}{u-3w} - \frac{v}{u+3w}} =$$

$$= \frac{u^2 - 9w^2 + v^2}{v(u+3w) - v(u-3w)} = \frac{u^2 + v^2 - 9w^2}{6vw}.$$

(8) és (9) összevetése szolgáltatja (1)-et.

Ha az (1) összefüggést mindhárom szögre felírjuk:

$$3 \cot g \alpha' = \cot g \alpha - 2 \cot g \beta - 2 \cot g \gamma,$$

$$3 \cot g \beta' = \cot g \beta - 2 \cot g \alpha - 2 \cot g \gamma,$$

$$3 \cot g \gamma' = \cot g \gamma - 2 \cot g \alpha - 2 \cot g \beta,$$

e három egyenletet összeadjuk és mindkét oldalt hárommal osztjuk, nyerjük a bizonyítandó (2) összefüggést.

Kaiser Marianna (Bp., II., Hámán Kató lg. IV. o. t.)