

I. megoldás: A szabályos tizennyolcszöget 18 egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontjuk. Egy ilyen háromszög alapja a , a szemközti középponti szög $\frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$. Az a -hoz tartozó magasság (a sokszögbe írt kör sugara) a háromszöget két derékszögű háromszögre bontja. Innen fejezzük ki a háromszoros szög, vagyis 30° sinusát a $\sin 10^\circ$ -kal.

$$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Ennek alapján

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ,$$

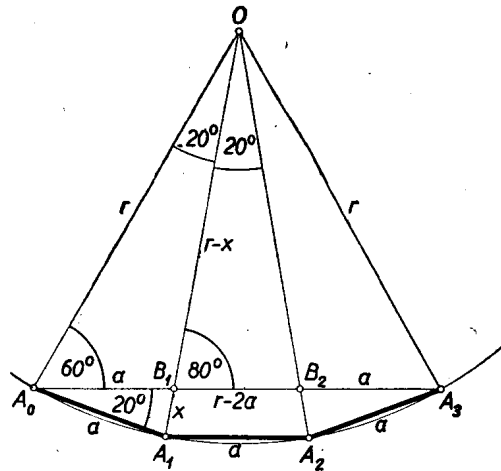
azaz

$$\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{a}{2r} - 4 \left(\frac{a}{2r} \right)^3,$$

ahonnan a megfelelő átalakítások és rendezés után a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Opitz Klára (Bp. VIII., Kandó Kálmán ip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Trigonometria nélkül is bizonyíthatjuk a feladat állítását. Tekintsük az O középpontú és r sugarú körbe írt $A_0A_1A_2A_3 \dots A_{17}$, szabályos tizennyolcszög első 3 oldalát a hozzátartozó O csúcsú egybevágó egyenlő szárú háromszögekkel együtt (lásd az ábrát).



E háromszög szögei 20° , 80° , 80° . Mivel $\angle A_0OA_3 = 60^\circ$, azért az $A_0OA_3\Delta$ egyenlő oldalú. Jelöljük az A_0A_3 szakasz metszéspontját az OA_1 , és OA_2 , körsugarakkal B_1 , ill. B_2 -vel. A szimmetriaviszonyok folytán $B_1B_2 \parallel A_1A_2$ így az $OB_1B_2\Delta$ szögei szintén 20° , 80° , 80° . A keletkezett $A_0A_1B_1\Delta$ -ben az A_0 -nál fekvő szög $80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$, B -nél levő szög pedig mint csúcsszög 80° , tehát $A_0A_1B_1\Delta \sim OA_0A_1\Delta \sim OB_1B_2\Delta$.

Ezek szerint $A_0B_1 = B_2A_3 = a$, és így $B_1B_2 = A_0A_3 - 2a = r - 2a$. Az A_1B_1 szakaszt x -szel jelölve $x : a = a : r$, amiből $x = \frac{a^2}{r}$.

Másrészt

$$(r - 2a) : (r - x) = a : r.$$

x helyébe $\frac{a^2}{r}$ -t írva

$$r(r - 2a) = a \left(r - \frac{a^2}{r} \right),$$

amiből a bizonyítandó állítás következik.

Hidas Péter (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.)