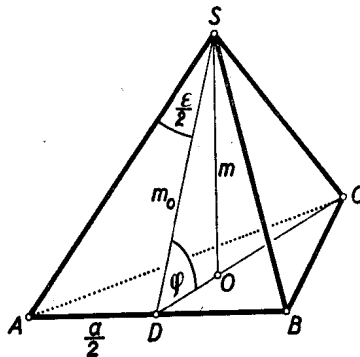


Legyen a szabályos 3 oldalú gúla alaplaja ABC , csúcspontja S , alapéle a . Az alaplaj középpontját jelöljük O -val, akkor SO , a gúla magassága, merőleges az alaplaj síkjára, tehát a $DOS \angle = 90^\circ$ (lásd az ábrát).



Az $SD = m_0$ oldallap-magasság felezi az ε élszöget és a CD alaplaj-magassággal bezárja a φ lapszöget. Az ADS derékszögű háromszögből

$$(1) \quad m_0 = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2},$$

a DOS derékszögű háromszögből

$$(2) \quad m_0 = \frac{OD}{\cos \varphi} = \frac{1}{3} \cdot DC \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \varphi}.$$

(1) és (2) egybevetéséből következik, hogy

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3 \cos \varphi}, \quad \text{vagyis} \quad 3 \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Figyelembe véve a $\varphi = \varepsilon$ feltételt, mindkét oldalt négyzetre emelve nyerjük, hogy

$$3 \cos^2 \varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon}.$$

Innen $\cos \varepsilon$ -ra, a

$$3 \cos^3 \varepsilon + 3 \cos^2 \varepsilon + \cos \varepsilon = 1$$

harmadfokú egyenlet adódik.

Mindkét oldalt 9-cel szorozva

$$27 \cos^3 \varepsilon + 27 \cos^2 \varepsilon + 9 \cos \varepsilon = 9.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal $3 \cos \varepsilon + 1$ köbének első három tagja, tehát mindkét oldalhoz 1-et adva

$$(3 \cos \varepsilon + 1)^3 = 10,$$

ahonnan

$$\cos \varepsilon = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{3} \sim 0,3848,$$

és így

$$\varepsilon = \varphi = 67^\circ 22'.$$