

Alábbi megoldásokban felhasználjuk a következő megjegyzést.

Tekintve, hogy hasonló háromszögekben a szögek egyenlők, nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.

I. megoldás: A cosinus-tétel alapján

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 36 - 16}{60} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4},$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

Ennek alapján

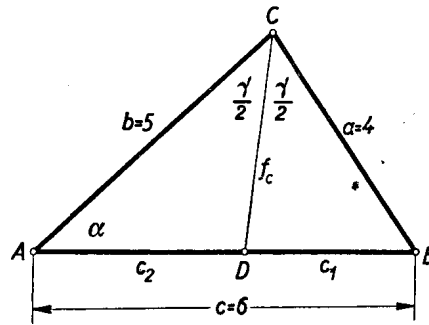
$$(1) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8} = \cos \gamma.$$

Mivel α a legkisebb szög, így hegyesszög, tehát $2\alpha < 180^\circ$, és ezért az (1) egyenlőségből következik, hogy

$$2\alpha = \gamma.$$

Zsombók Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Szerkesszünk az adott oldalakból háromszöget, és rajzoljuk meg a γ szög f_c felezőjét, amelynek végpontja a c oldalon D (1. ábra).



1. ábra

Legyen $BD = c_1$, $AD = c_2$. Azt kell kimutatnunk, hogy $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, pedig akkor és csak akkor áll, ha $c_2 = f_c$.

Ismeretes tétel alapján $c_1 : c_2 = a : b = 4 : 5$, és így

$$c_1 = \frac{4}{9}c = \frac{4}{9} \cdot 6 = \frac{8}{3}$$

és

$$c_2 = \frac{5}{9} \cdot 6 = \frac{10}{3}.$$

A 698. feladatban bebizonyítottuk, hogy

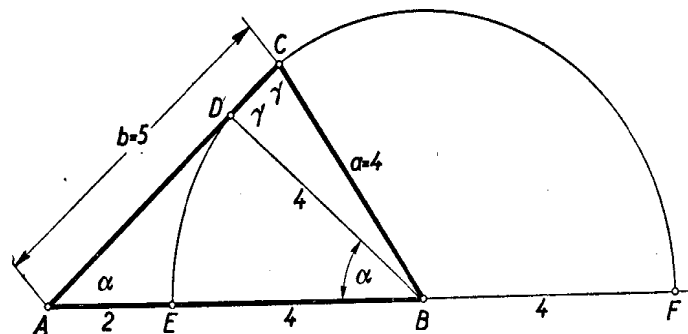
$$f_c = \sqrt{ab - c_1 c_2} = \sqrt{20 - \frac{80}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3},$$

tehát tényleg

$$c_2 = f_c.$$

Halmágyi Ákos (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. II. o. t.)

III. megoldás: Az oldalaival megadott háromszög B csúcsa körül rajzoljunk $BC = a = 4$ sugarú kört. Messe ez az AC oldalt másodszor D -ben, az AB oldalt, ill. annak meghosszabbítását E , ill. F -ben (2. ábra).



2. ábra

Ismeretes, hogy a körhöz egy pontból húzott szelő metszeteinek szorzata állandó, vagyis

$$AD \cdot AC = AE \cdot AF = AD \cdot 5 = 2 \cdot 10,$$

ahonnan

$$AD = \frac{20}{5} = 4.$$

Tehát D az A és C pont között van, és az $ADB\Delta$ egyenlő szárú, vagyis az $ABD\angle = \alpha$, és így a háromszög $BDC\angle = \gamma$ külső szöge egyenlő a szemközti két belső szög összegével, vagyis

$$\gamma = 2\alpha.$$

Soós Tibor (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

IV. megoldás: Keressük annak, az oldalakkal kifejezett, szükséges és elégséges feltételét, hogy $2\alpha = \gamma$ teljesüljön. Az 1. ábra jelöléseit használva ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha az ABC és a CBD háromszögek hasonlóak, mivel a két háromszög B -nél levő szöge közös. Ugyancsak a közös szög miatt ez a hasonlóság akkor és csak akkor következik ha

$$c_1 : a = a : c.$$

A szögfelező tétel alapján

$$c_1 = \frac{ac}{a+b},$$

és így a keresett szükséges és elégséges feltétel, hogy

$$a^2 = cc_1 = \frac{ac^2}{a+b},$$

vagy átrendezve

$$c^2 = a(a+b)$$

teljesüljön, – feltéve természetesen ezenkívül azt, hogy az a, b, c oldalakkal szerkeszthető háromszög.

Feladatunkban $c^2 = 36$, $a(a+b) = 36$, tehát a kritérium teljesül, s így

$$2\alpha = \gamma.$$

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)