

I. megoldás: Mivel

$$\cos 36^\circ = \cos 2 \cdot 18^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ,$$

azért elegendő $\sin 18^\circ$ -ot kiszámítani. Ez fele az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög oldalának. Ismeretes a tananyagból, hogy e tízszög oldal hossza $(\sqrt{5} - 1)/2$, tehát

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \sin 18^\circ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \\ &= 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Farkas László (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)

II. megoldás: Felhasználva a $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, továbbá a

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

és a

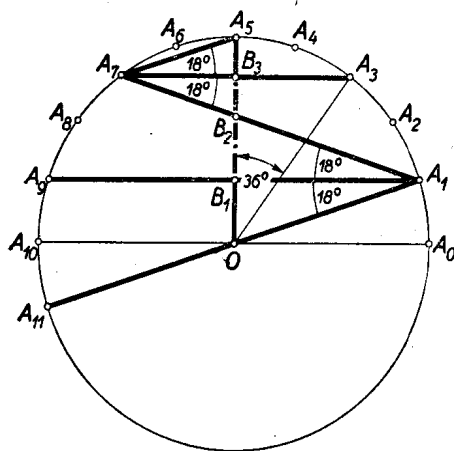
$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \sin 18^\circ &= \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ = \\ &= \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ (2 \cos 36^\circ)}{2 \cos 18^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2 \sin 72^\circ} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Stahl János (Bp. VI., Kölcsey g. III. o. t.)

III. megoldás: Állításunk bizonyítható goniometriai átalakítások alkalmazása nélkül is, csupán a szögfüggvények értelmezését használva fel. Rajzoljuk meg egy O középpontú egységsugarú körben a szabályos húszszög első 12 csúcspontját $A_0, A_1, \dots, A_{11}$ -et (lásd az ábrát).



Akkor $\angle A_0OA_1 = 18^\circ$, és $\angle A_0OA_3 = 54^\circ$. Húzzuk meg az A_1A_{11} , A_1A_9 , A_1A_7 , A_7A_3 és A_7A_5 szakaszokat, amelyek az OA_5 sugarat rendre az O, B_1, B_2, B_3, A_5 pontokban metszik. A_1A_9 és A_7A_3 az OA_5 -re vonatkozó szimmetria miatt merőlegesek az OA_5 sugárra, és az A_1 , valamint A_2 -nél keletkező 2-2 szög egyenként 18° -os, mint a kör kerületének 10-ed részén nyugvó kerületi szögek, $\angle A_3OA_5$ pedig, mint ugyanakkora íven nyugvó középponti szög, 36° -os. A keletkező 22 derékszögű háromszög egybevágósága alapján

$$OB_1 = B_1B_2 \quad \text{és} \quad B_2B_3 = B_3A_5,$$

és így, mivel e négy szakasz összege $OA_5 = 1$, azért

$$B_1B_2 + B_2B_3 = OB_1 + B_3A_5 = \frac{1}{2}.$$

De másrészt

$$B_1B_2 + B_2B_3 = B_1B_3 = OB_3 - OB_1.$$

Az OA_1B_1 és OA_3B_3 derékszögű háromszögek átfogója a körsugár, tehát egységnyi hosszúságú, és az előbbi A_1 -nél levő hegyesszöge 18° , az utóbbi O -nál levő hegyesszöge 36° , így

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = OB_3 - OB_1 = \frac{1}{2}.$$

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.)