

I. megoldás: A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. Kifejezésünket $f(n)$ -nel jelölve, $f(1) = 24 = 6 \cdot 4$, vagyis tételünk $n = 1$ -re igaz.

Tegyük fel, hogy tételünk egy k egész számra igaz, vagyis

$$f(k) = 2k^3 + 9k^2 + 13k = 6N_k;$$

kimutatjuk, hogy akkor $f(k+1)$ is osztható 6-tal.

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2(k+1)^3 + 9 + (k+1)^2 + 13(k+1) = 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + \\ &+ 9(k^2 + 2k + 1) + 13(k+1) = (2k^3 + 9k^2 + 13k) + 6k^2 + 24k + 24 = \\ &= 6N_k + 6(k^2 + 4k + 4) = 6N_{k+1}. \end{aligned}$$

Mivel tételünk, mint láttuk $n = 1$ -re igaz, azért minden természetes számra helyes.

Beke Gyula (Hatvan, Bajza g. IV. o. t.)

II. megoldás: Alakítsuk át kifejezésünket a következőképpen:

$$\begin{aligned} 2n^3 + 9n^2 + 13n &= 2n^3 + 6n^2 + 4n + 3n^2 + 9n = 2n(n^2 + 3n + 2) + \\ &+ 3n^2 + 3n + 6n = 2n(n+1)(n+2) + 3n(n+1) + 6n. \end{aligned}$$

Mivel két egymás utáni szám szorzata mindig páros, három egymás utáni szám szorzata pedig mindig osztható 2-vel és 3-mal, s így 6-tal is, azért a jobboldal első tagja osztható $2 \cdot 6 = 12$ -vel, a második tagja osztható $3 \cdot 2 = 6$ -tal. A harmadik tagnak 6-tal való oszthatósága nyilvánvaló. Tehát a három tag összege osztható 6-tal.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)