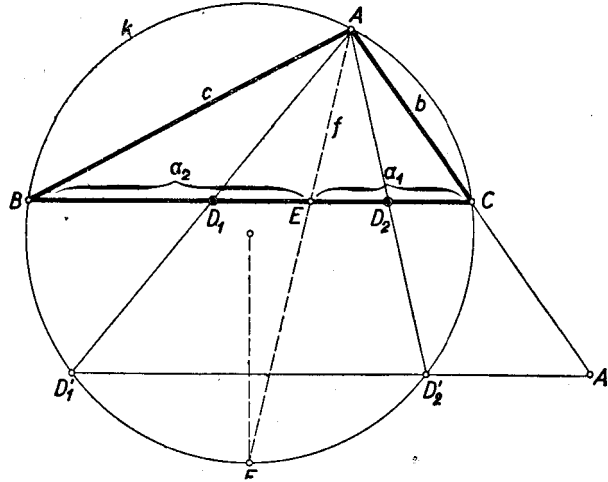


I. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak (1. ábra).



1. ábra

Legyen k az $ABC\Delta$ köré írt kör. Az AD egyenes metszéspontja k -val legyen D' . A húrok szeleteinek szorzatára vonatkozó tétel szerint

$$BD \cdot DC = AD \cdot DD'.$$

De mivel másrészt a feladat követelménye szerint

$$BD \cdot DC = AD^2,$$

azért

$$DD' = AD.$$

Ennek alapján a szerkesztés: A -nak C -re vonatkozó A' tükörképén át párhuzamost húzunk a BC oldallal. E párhuzamos metszi ki a k körből a D'_1 és D'_2 pontokat. AD'_1 és AD'_2 -metszéspontjai BC -vel: D_1 , ill. D_2 feladatunk megoldásai.

A megoldhatóság feltétele: Legyen a $BAC\angle = \alpha$ szögfelezőjének metszéspontja a $BC = a$ oldallal E , a k körrel F . Megoldás akkor van, ha $f = AE \leq EF$.

De $AE \cdot EF = CE \cdot EB = a_1 \cdot a_2$, és így a megoldhatóság feltétele így írható:

$$f^2 \leq a_1 a_2.$$

A 688. feladatban bebizonyítottuk, hogy

$$f_a^2 = bc - a_1 a_2,$$

és így a keresett feltétel

$$bc - a_1 a_2 \leq a_1 a_2,$$

vagyis

$$\frac{bc}{a_1 a_2} = \frac{b}{a_1} \cdot \frac{c}{a_2} \leq 2.$$

De $\frac{b}{a_1} = \frac{c}{a_2} = \frac{b+c}{a}$, ezért a feltétel $\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 \leq 2$, és így 2, 1, 0 D pont a szerkeszthető az a oldalon, aszerint, amint

$$b+c \leq a\sqrt{2}.$$

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy $\alpha = 90^\circ$ esetén az egyik D pont az átfogóra merőleges magasság talppontja, a másik az átfogó felezőpontja, vagyis a körülírt kör középpontja.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Mint az I. megoldásban láttuk, a D pont a háromszög köré írt K középpontú kör egy A -ból kiinduló húrjának felezőpontja, s mint ilyen, rajta van a KA körsugár fölé rajzolt Thales-körön (2. ábra).

