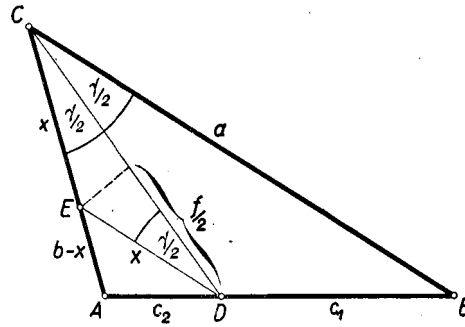


Az alábbiakban f_c helyett rövidebben f -et írunk.

I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A cosinus-tétel szerint az ACD_{Δ} és a BCD_{Δ} -ből:

$$c_1^2 = a^2 + f^2 - 2af \cos \frac{\gamma}{2}, \quad c_2^2 = b^2 + f^2 - 2bf \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Mindkét egyenletből kifejezve $\cos \frac{\gamma}{2}$ -t

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + f^2 - c_1^2}{2af} = \frac{b^2 + f^2 - c_2^2}{2bf}.$$

Ebből

$$(1) \quad f^2 = ab + \frac{ac_2^2 - bc_1^2}{a - b}.$$

Ismeretes tétel szerint

$$(2) \quad c_1 : c_2 = a : b, \quad \text{innen} \quad ac_2 = bc_1.$$

Ennek felhasználásával (1) jobboldalán a tört számlálóját átalakítjuk:

$$ac_2^2 = ac_2 \cdot c_2 = bc_1c_2 \quad \text{és} \quad bc_1^2 = bc_1 \cdot c_1 = ac_1c_2,$$

mely értékeket (1)-be helyettesítve, máris a bizonyítandó

$$(3) \quad f^2 = ab - c_1c_2, \quad \text{azaz} \quad f = \sqrt{ab - c_1c_2}.$$

egyenlőségre jutunk.

Ahhoz, hogy eredményünket a numerikus példa megoldására alkalmazhassuk, ki kell számítanunk c_1 -et és c_2 -t.

A c oldalt a cosinus-tétellel nyerhetjük:

$$c^2 = 18^2 + 9^2 - 2 \cdot 18 \cdot 9 \cos 120^\circ = 9^2 \left(4 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right), \quad \text{tehát } c = 9\sqrt{7}.$$

Ezután (2) szerint c_1 -t és c_2 -t úgy nyerjük, hogy c -t $\frac{a}{b} = \frac{18}{9} = \frac{2}{1}$ arányban osztjuk, vagyis $c_1 = 6\sqrt{7}$, $c_2 = 3\sqrt{7}$.

Ezen értékeket (3)-ba helyettesítve

$$f = \sqrt{18 \cdot 9 - 6 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{18(9 - 7)} = 6 \text{ cm.}$$

Jáky Mária (Pécs, Bányaip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Húzzunk a D ponton át a CB oldallal párhuzamos egyenest. Messe ez CA -t az E pontban (1. ábra). Mivel CD szögfelező, CDE egyenlő szárú; szárait jelöljük x -szel. E háromszögből

$$(1) \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{f}{2x}$$

x értékét az ADE_{Δ} és ABC_{Δ} hasonló voltából számíthatjuk ki:

$$(b - x) : x = b : a, \quad \text{innen} \quad x = \frac{ab}{a + b}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve

$$(2) \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \frac{a+b}{ab} f.$$

Felírjuk az ADC_{Δ} -re a cosinus-tételt:

$$c_2^2 = b^2 + f^2 - 2bf \cos \frac{\gamma}{2},$$

majd behelyettesítjük (2)-ből $\cos \frac{\gamma}{2}$ -értékét:

$$(3) \quad c_2^2 = b^2 + f^2 - 2bf \left(\frac{1}{2} \frac{a+b}{ab} f \right) = b^2 + f^2 - f^2 \frac{a+b}{a} = b^2 - f^2 \frac{b}{a}.$$

Még egy átalakítást végzünk a szögfelező-tétel felhasználásával. A baloldalon

$$c_2^2 = c_2 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1 \frac{b}{a}.$$

Ezt (3)-ba helyettesítve, és a nyert egyenletet $\frac{b}{a}$ -val szorozva, a

$$c_1 c_2 = ab - f^2$$

összefüggésre jutunk, amely a bizonyítandó egyenlőségnek átrendezett alakja.

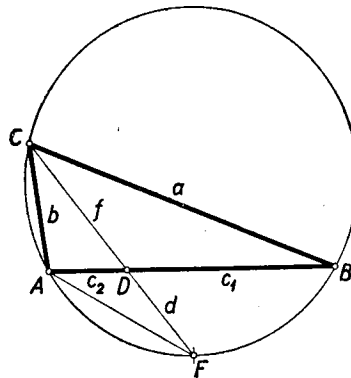
Ez a megoldás az I. megoldásnál nem egyszerűbb, de a kitűzött numerikus példa megoldása ezúttal egészen egyszerű a (2) egyenlet alapján:

$$f = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 9}{27} \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Kaiser Marianna (Bp. II., Hámán Kató lg. IV. o. t.)

Állításunk szögfüggvények felhasználása nélkül is bizonyítható és a 120° -os szög folytán a numerikus számítás szintén elvégezhető szögfüggvények nélkül, amint ezt az alábbi III. és IV. megoldások mutatják.

III. megoldás: Rajzoljuk meg a háromszög köré írható kört, amelyet a szögfelező meghosszabbítása F pontban metsz. Jelöljük a DF szakaszt d -vel (2. ábra).



2. ábra

A D ponton átmenő szelő szeleteinek szorzataira vonatkozó tétel szerint

$$(1) \quad fd = c_1 c_2,$$

másrészt

$$CAF_{\Delta} \sim CDB_{\Delta},$$

C -nél fekvő szögük egyenlő, mert f szögfelező, $F \sphericalangle = B \sphericalangle$, mert mindkettő az AC íven nyugvó kerületi szög, a megfelelő oldalak aránya,

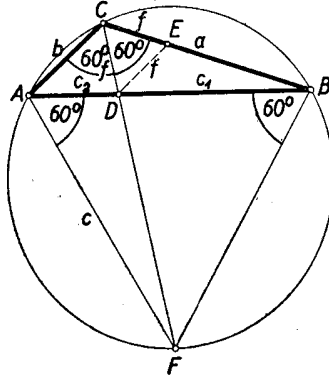
$$(2) \quad b : (f + d) = f : a,$$

vagyis

$$f^2 + fd = ab.$$

Helyettesítsük be fd -nek (1) alatt nyert értékét (2)-be, ezzel a bizonyítandó állításhoz jutunk.

A numerikus számítás egyszerűsítésére az adatoknak megfelelő ábra elkészítése (3. ábra) nyújt lehetőséget.



3. ábra

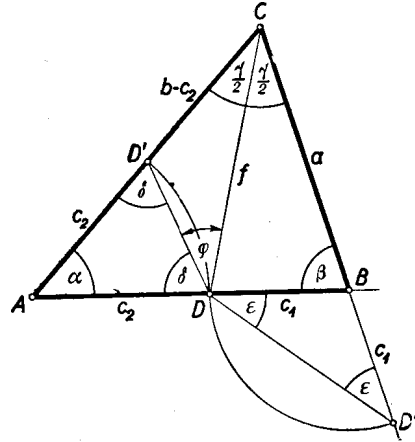
A 120° -os szög miatt ABF_Δ egyenlő oldalú, tehát $AF = c$. Másrészt $a : b = c_1 : c_2 = 2 : 1$ miatt $c_2 = \frac{c}{3}$. Továbbá a szögek egyenlősége miatt $ADF_\Delta \sim CDB_\Delta$, és így $AF : AD = BC : CD$, vagyis $c : \frac{c}{3} = a : f$, és így $f = \frac{a}{3} = 6$ cm.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. III. o. t.)

IV. megoldás: A szögfelező-tétel szerint $\frac{a}{b} = \frac{c_1}{c_2}$, tehát $bc_1 - ac_2 = 0$. Ennek felhasználásával bizonyítandó állításunk így is írható:

$$f = ab + bc_1 - ac_2 - c_1c_2 = (a + c_1)(b - c_2).$$

Forgassuk A körül a c_2 -t az $AC = b$ oldalra, c_1 -et pedig B körül a $BC = a$ oldal meghosszabbítására (4. ábra).



4. ábra

Az ADD'_Δ egyenlő szárú, tehát az alap mellett fekvő δ szögre

$$\delta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

δ külső szöge CDD'_Δ -nek, tehát

$$\delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} + \varphi,$$

amiből

$$\varphi = 90^\circ - \frac{a}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

A DBD''_Δ egyenlő szárú háromszög külső szöge β , s így az alapjánál fekvő ε szögre

$$(2) \quad \varepsilon = 90^\circ - \frac{a}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

(1) és (2)-ből következik, hogy $\varphi = \varepsilon$, s így $CDD'_\Delta \sim CD''D_\Delta$. E háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, vagyis

$$(b - c_2) : f = f : (a + c_1),$$

innen

$$f^2 = (a + c_1)(b - c_2),$$

ami állításunkkal azonos.

A numerikus számítás elvégzésére húzzunk a 3. ábrában D -n át AC -vel párhuzamost, amely messe a BC oldalt E -ben. A $CDE_{\triangle}$ minden szöge 60° , tehát $DE = EC = f$. Az ABC és DBE háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$AC : DE = BC : BE, \quad \text{azaz} \quad 9 : f = 18 : (18 - f), \quad \text{amiből} \quad f = 6.$$

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. III. o. t.)