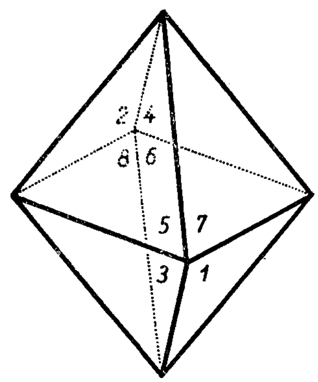
I. megoldás. *a)* Először vizsgáljuk meg, hogy a gúla csúcsán átmenő 4 sík hány részre osztja a teret. A 650. feladat megoldásánál (K. M. L. X. kötet, 5. sz.) megmutattuk, hogy három sík, amely egy pontban metszi egymást, a teret nyolc részre bontja, míg egy negyedik sík, mely az előbbiekhez képest általános helyzetű – tehát a három sík közös pontján nem megy át és sem valamelyik előző síkkal, sem két előző sík metszésvonalával nem párhuzamos – 7 térrészt vág ketté, úgyhogy összesen 15 térrész keletkezik, melyek közül egy térrész véges, a többi végtelen. Ha a negyedik sík a három sík közös pontján megy át, a 15 térrész közül a véges térrész pontttá fajul, azaz 14 térrész jön létre. (Képzeljünk pl. a 151. oldalon az ábrán az ABC sík helyett a D ponton átmenő ABC-vel párhuzamos síkot.)

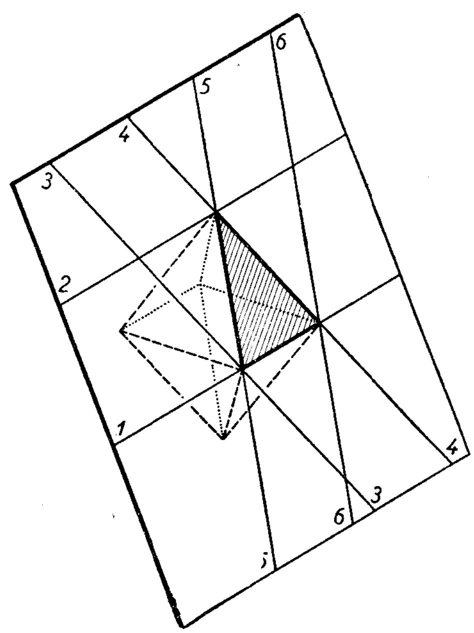
Tekintsük végül az alaplap síkját. Ezt a négy oldallap síkja két párhuzamos egyenespárban metszi, melyek kilenc részre bontják. Minden síkrész egy–egy újonnan keletkező térrészt határol, így összesen $14 + 9 = 23$ térrész keletkezik.

b) Az oktaédert négy párhuzamos síkpár (1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8) határolja (1. ábra).



1. ábra

Az első síkpár a teret három részre bontja; az első és második síkpár együtt kilenc részre; az első, második és harmadik együtt 27-re. (E három síkpár egy véges térrészt: paralelepipidont határol. Eddig a feladat lényegében egyezik a 650. feladat első részével.) Tekintsük a negyedik síkpár egyik síkját, a 7 jelzésű vonalkázott háromszög síkját (2. ábra).



2. ábra

Ezt az előző hat sík három párhuzamos egyenesben metszi, az ábrán látható módon, pl. az 1 jelzésű egyenes az 1 jelzésű sík metszésvonala a 7. jelzésű vonalkázott síkkal, s i. t. A keletkezett metszésvonalak – amint az ábráról leolvasható – a síkot 16 részre bontják, tehát ez a sík 16 térrészt vág ketté, éppígy a vele párhuzamos 8 jelzésű sík is. Összesen tehát $27 + 2 \cdot 16 = 59$ térrész keletkezik.

Csiszár Imre (Petőfi g. III. o. t.)

II. megoldás. Ugyanezt az eljárást követjük, mint az idézett 650. feladat II. megoldásánál.

a) A négyzetes gúlából, lapon, élen és csúcson kilépve 5+8+5 új térrészbe jutunk. Észre kell azonban vennünk hogy ezek a térrészek az eredeti gúlával együtt még nem töltik ki teljesen a teret, 4 térrész kimarad. Ezekbe közvetlenül eljuthatunk a gúla csúcsánál keletkező négyoldalú testszöglet csúcsszögletétől a csúcsszöglet lapjain keresztül. (A térrészek elképzelésénél ne hagyjuk számításon kívül két–két szemközti oldallap síkjának metszésvonalát, melyek a csúcson mennek át és párhuzamosak egy–egy alapéllel.) Összesen tehát $1+(5+8+5)+4=23$ térrész keletkezik.

b) Az oktaéderlapok kiterjesztésével minden lapra egy–egy tetraéder épül rá. Így a térrészek összeszámolásánál figyelembe kell vennünk a tetraéderekből való kilépéssel keletkező új térrészeket is. Az oktaéderből lapon, élen és csúcson kilépve $8+12+6$ új térrészbe jutunk. A tetraéderek lapjain kilépve nem jutunk új térrészbe. (Vagy az oktaéderbe jutunk vissza vagy olyan térrészbe kerülünk, amelybe kiléphetünk az oktaéder élén keresztül.) A tetraéder alapélein keresztül (a tetraéder és oktaéder közös élein) szintén nem jutunk új térrészbe, hanem egy lapra épített tetraéderbe. A tetraéder oldalélein keresztül oly térrészekbe jutunk, melyekbe egy másik tetraéder alaplapjának csúcsán át is eljuthatunk. Így végül is minden tetraédernél azt a négy–négy térrészt kell számításba vennünk, amelyekbe a csúcsokon keresztül jutunk ki. Az összes térrészek száma: $1+(8+12+6)+8\cdot 4=59$, melyek az egész teret kitöltik.

Jedlovszky Pál (Bp. XIV., Petrik vegyip. t. III. o. t.)