

I. megoldás: Fel kell tennünk, hogy $b \neq 1$ és ki kell zárunk az $y = 1$ értéket, mert különben egyenletrendszerünknek nem volna értelme; továbbá feltehetjük, hogy $a \neq 1$, mert különben $x = 1$ és y tetszőleges. Ekkor $x \neq 1$.

Osszuk el a (2) egyenletet (1)-gyel:

$$\frac{(x^3 - 1)(y - 1)}{(y^3 - 1)(x - 1)} = \frac{(a^3 - 1)(b - 1)}{(b^3 - 1)(a - 1)}.$$

Ebből

$$\frac{x^2 + x + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1},$$

vagyis

$$(3) \quad (b^2 + b + 1)(x^2 + x + 1) = (a^2 + a + 1)(y^2 + y + 1).$$

(1)-ből

$$(4) \quad x = \frac{a - 1}{b - 1}(y - 1) + 1,$$

és így

$$x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1 = \frac{(a - 1)^2}{(b - 1)^2}(y^2 - 2y + 1) + \frac{3(a - 1)}{b - 1}(y - 1) + 3.$$

Ezen értéket (3)-ba helyettesítve, és mindkét oldalt $(b - 1)^2$ -tel szorozva

$$\begin{aligned} (b^2 + b + 1)[(a - 1)^2(y^2 - 2y + 1) + 3(a - 1)(b - 1)(y - 1) + 3(b - 1)^2] = \\ = (b - 1)^2(a^2 + a + 1)(y^2 + y + 1). \end{aligned}$$

y hatványai szerint rendezve

$$\begin{aligned} (a^2b - ab^2 + b - a)y^2 + (ab^3 - a^2b^2 + 2ab - a^2 - b^3 + ab^2 - b^2)y + \\ + (b - a)(b^2 - a)b = 0, \end{aligned}$$

vagyis

$$(b - a)(1 - ab)y^2 + (b - a)[b(ab - 1) + a - b^2]y + (b - a)(b^2 - a)b = 0.$$

$a = b$ esetén egyenletünk azonossággá válik, és minden $x = y$ érték gyöke egyenletrendszerünknek.

$ab = 1$ esetén $b = \frac{1}{a}$, és így (1) jobb oldala $-a$, (2) jobb oldala $-a^3 = (-a)^3$, vagyis ez a feltevés ellentmondásra vezet.

Tehát feltehetjük, hogy $a - b \neq 0$, $1 - ab \neq 0$.

$(b - a)(1 - ab)$ -vel osztva nyerjük

$$y^2 - \left(b + \frac{b^2 - a}{1 - ab}\right)y + \frac{b(b^2 - a)}{1 - ab} = 0,$$

ahonnan

$$y_1 = b, \quad y_2 = \frac{b^2 - a}{1 - ab},$$

és így (4)-ből

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a^2 - b}{1 - ab}.$$

Az $x_1 = a$, $y_1 = b$ triviális megoldás egyébként közvetlenül látható.

Megjegyzés: Az x_2 , y_2 gyökök mindegyikének – mint láttuk – különböznie kell 1-től, tehát $a^2 - b \neq 1 - ab$, vagyis $(a - 1)(a + 1 + b) \neq 0$. Tehát $x_2 \neq 1$, ha $a + b + 1 \neq 0$. Ugyanez a feltétele annak, hogy $y_2 \neq 1$.

x_2 , y_2 csak akkor különbözik a triviális megoldástól, ha $\frac{a^2 - b}{1 - ab} \neq a$, vagyis $(a - 1)(ab + b + a) \neq 0$, azaz, ha $ab + b + a \neq 0$. Ugyanekkor $y_2 \neq b$.

Zagg József (Pécs, Bányaip. t. IV. o. t.)

II. megoldás. Közvetlenül látjuk az $x_1 = a$, $y_1 = b$ triviális megoldást. Éppen úgy, mint a I. megoldásban (2) és (1) osztásából nyerjük

$$(3) \quad \frac{x^2 + x + 1}{a^2 + a + 1} = \frac{y^2 + y + 1}{b^2 + b + 1}.$$

Legyen (1) alapján

$$\frac{x-1}{a-1} = \frac{y-1}{b-1} = z.$$

Innen

$$x = (a-1)z + 1, \quad y = (b-1)z + 1.$$

Ezen értékeket (3)-ba helyettesítve

$$\frac{[(a-1)z+1]^2 + (a-1)z + 2}{a^2 + a + 1} = \frac{[(b-1)z+1]^2 + (b-1)z + 2}{b^2 + b + 1}.$$

A törtet eltávolítva, rendezve és $3(b-a)$ -val egyszerűsítve

$$(4) \quad (1-ab)z^2 + (ab-a-b-2)z + (a+b+1) = 0.$$

Az $x_1 = a$, $y_1 = b$ triviális megoldás a $z = 1$ értéket szolgáltatja, vagyis $z = 1$ a (4) egyenletnek egyik gyöke. A $(z-1)$ gyöktényezővel osztva

$$(1-ab)z - (a+b+1) = 0,$$

amiből

$$z = \frac{a+b+1}{1-ab} = \frac{x-1}{a-1} = \frac{y-1}{b-1}.$$

Ebből

$$x_2 = \frac{a^2-b}{1-ab}, \quad y_2 = \frac{b^2-a}{1-ab}.$$

Vigassy György (Bp. I., Petőfi g. IV. o.t.)