

I. megoldás: Legyen a parabola egyenlete $y^2 = 4tx$, vagyis a fókusz az origótól való távolsága $OF = t$. Messe a parabola érintője a csúcserintőt, azaz az y tengelyt, egy E pontban és legyen $OE = u$ (1. ábra), akkor az EF egyenes irányítányezője $-\frac{u}{t}$, és így az EF -re merőleges érintő egyenlete

$$(1) \quad y = \frac{t}{u}x + u.$$

1. ábra

A másik két érintő által az y tengelyből lemetezett részeket v , ill. w -vel jelölve, e két érintő egyenlete

$$(2) \quad y = \frac{t}{v}x + v,$$

és

$$(3) \quad y = \frac{t}{w}x + w.$$

Az érintők alkotta háromszög egyik csúcsának koordinátáit megkapjuk, ha megoldjuk pl. az (1) és (2) egyenletrendszert. Elvégezve a számítást nyerjük, hogy

$$x = \frac{uv}{t}, \quad y = u + v.$$

E csúcsból kiinduló magasság merőleges a (3) egyenesre; egyenlete tehát

$$(4) \quad y - (u + v) = -\frac{w}{t} \left(x - \frac{uv}{t} \right).$$

Hasonlóképpen az (1) egyenesre merőleges magasság egyenlete

$$(5) \quad y - (v + w) = -\frac{u}{t} \left(x - \frac{vw}{t} \right).$$

(4) és (5)-ből a magasságpont koordinátái

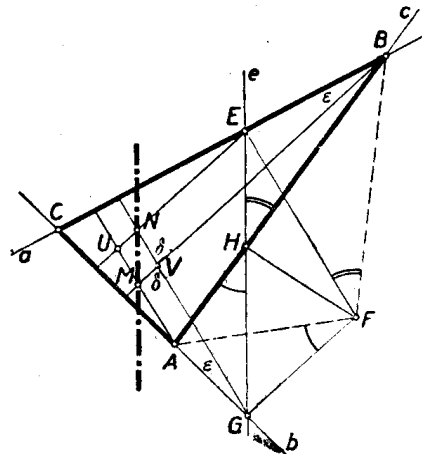
$$(6) \quad x = -t,$$

$$(7) \quad y = u + v + w + \frac{uvw}{t^2}.$$

(6) azt mutatja, hogy a magasságpontok a direktrixen vannak, (7)-ből pedig következik, hogy minden megadott t és y esetén – tehát a direktrix bármely pontjához – meg lehet választani az u , v és w értékeket úgy, hogy (7) teljesüljön. A keresett mértani hely tehát a direktrix.

Almási Lajos (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük a parabola fókuszát F -vel, csúcserintőjét e -vel, a három adott érintőt a -val, b -vel és c -vel. Az adott érintők messék a csúcserintőt rendre az E , G és H pontban, egyébként a betűzést a 2. ábra mutatja.



Először két tetszőleges adott érintőhöz, pl. a és b -hez vegyük hozzá harmadiknak a csúcserintőt. Az így keletkező $ECG\Delta$ magassági pontja legyen N . A szerkesztés szerint $EFGN$ paralelogramma, tehát az N pont a direktrikszon van. Tekintsük azután az $ABC\Delta$ -et. Az $ECG\Delta$ és $ABC\Delta$ két-két magasság-vonala szintén paralelogrammát határoz meg. Ha sikerülne kimutatni, hogy ez az $NVMU$ paralelogramma az $EFGN$ paralelogrammához hasonló, ebből máris következne – tekintve, hogy a paralelogrammák hasonló helyzetűek –, hogy az M pont is a direktrikszon van. Elég volna kimutatni, hogy

$$(1) \quad NV : MV = EF : GF.$$

Tekintsük a $V BEN$ és $VGAM$ trapézeket, melyekben az alapon fekvő szögek egyenlők (a V -nél fekvő δ szögek csúcsszögek, a B , ill. G -nél fekvő ε szögek merőleges szárú szögek). Ezért a nem párhuzamos oldalak aránya egyenlő, vagyis

$$(2) \quad NV : MV = EB : AG.$$

Másrészt

$$FEB\Delta \sim FGA\Delta.$$

Ugyanis az F -nél fekvő egyíves szög egyenlő a H -nál fekvő egyíves szöggel, mert $AGFH$ húrnégyszög. Hasonló okból a kétíves szögek is egyenlők, továbbá a H -nál fekvő egyíves és kétíves szög csúcsszögek. Ezenkívül $FEB\Delta$ és $FCA\Delta$ derékszögűek. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$(3) \quad EB : AG = EF : GF,$$

amivel – figyelemmel (2)-re – az (1) alatti állításunkat bebizonyítottuk.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás: Ismeretes, hogy az érintőnek a csúcserintővel alkotott metszéspontjában az érintőre állított merőleges átmegy a parabola fókuszán. Ennélfogva az ABC érintőháromszögnek az e csúcserintő Simson-egyenesé, vagyis F rajta van az a , b és c érintők alkotta $ABC\Delta$ köré írt körön.

Ugyancsak ismeretes, hogy valamely P ponthoz tartozó Simson-egyenes felezi a PM távolságot, ahol M a háromszög magassági pontja (ld. 659. feladatot, XI. kötet 3–4. sz. 1955. nov. 89–90. old.).

Mivel minden érintőháromszög köré írt kör átmegy az F fókuszon, és utóbbihoz tartozó Simson-féle egyenes mindenkor a csúcserintő, azért az érintőháromszögek magasságpontjainak mértani helyét a csúcserintőnek F -ből, mint hasonlósági középpontból kétszeres távolságra való kivetítése adja, ami viszont nem más, mint a parabola vezéregyenesé.

Bánhidny Kálmán (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)