

Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a kúpszelet tengelyei egybeesnek a $\Sigma(90^\circ)$ rendszer tengelyeivel, amelyeket egyszerűsített derékszögű koordináta-rendszer tengelyeinek tekintünk.

Ez esetben az ellipszis és hiperbola közös egyenlete

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ahol a jelenti az ellipszis fél nagytengelyét, ill. a hiperbola fél főtengelyét, c pedig a lineáris excentricitást.

A keresett mértani hely pontjainak koordinátáit az érintők által a tengelyekből lemetezett részek adják.

Az (x_1, y_1) pontban érintő egyenes egyenlete

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{a^2 - c^2} = 1,$$

amiből

$$(2) \quad y = 0 \quad \text{esetén} \quad x = \frac{a^2}{x_1},$$

$$(3) \quad x = 0 \quad \text{esetén} \quad y = \frac{a^2 - c^2}{y_1}.$$

(2) és (3)-ból

$$x_1 = \frac{a^2}{x}, \quad y_1 = \frac{a^2 - c^2}{y}.$$

Az (x_1, y_1) pont rajta van az adott kúpszeleten, tehát x_1 és y_1 kielégítik az (1) alatti egyenletet, vagyis

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{(a^2 - c^2)^2}{y^2} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2 - c^2}{y^2} = 1$$

a keresett mértani hely egyenlete. Más alakban írva

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = x^2 y^2,$$

amiből nyilvánvaló, hogy a mértani hely negyedfokú görbe.

Két esetet kell megkülönböztetni: **a)** $a^2 - c^2 > 0$ és **b)** $a^2 - c^2 < 0$.

a) esetben $a^2 - c^2 = b^2$ és az (1) alatti egyenlet ellipszis-egyenlete, amelynek fél kistengelye b . A mértani hely egyenlete tehát

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = x^2 y^2,$$

amiből

$$y = \pm \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad x = \pm \frac{ay}{\sqrt{y^2 - b^2}}.$$

y valós, ha: $x < -a$ és $x > a$.

Értékkészlet: $y < -b$ és $y > b$.

Aszimptoták: $x = \pm a$ és $y = \pm b$.

Mindkét változónak csak páros kitevőjű hatványa szerepel, tehát görbénk mindkét tengelyre tükrös, és így az O pontra nézve centrálisan szimmetrikus. $a = b$ esetén az ellipszis körre fajul (ld. a 675. sz. feladatot). A négy egybevágó ágból álló görbe teljesen hasonlít a kör esetén nyert mértani helyhez (ld. az ábrát a múlt szám 139. oldalán), csak a síknegyedeket felező egyenesek ($y = x$, $y = -x$) már nem szimmetriatengelyek.

b) $a^2 - c^2 < 0$ esetén hiperbolával van dolgunk, melynek fél melléktengelye $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

A mértani helynek egyenlete ez esetben

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = x^2 y^2,$$

amiből

$$y = \pm \frac{bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x = \pm \frac{ay}{\sqrt{b^2 + y^2}}.$$

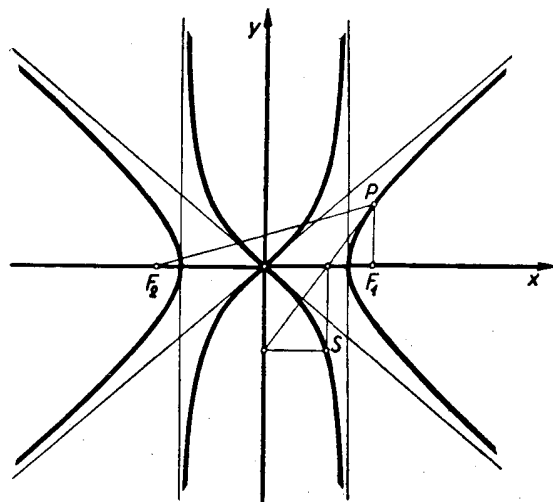
y valós, ha

$$-a < x < +a,$$

vagyis az értelmezési tartomány a $(-a, a)$ intervallum belső pontjai.

Értékkészlet: y minden értéket felvehet.

Aszimptoták: $x = \pm a$.



Éppen úgy, mint az **a)** esetben ez a görbe is 4 egybevágó ágból áll, melyek szimmetrikusak a két tengelyre, valamint az O pontra (ld. az ábrát).

Biczó Géza (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)