

I. megoldás: Legyen $\operatorname{tg} \alpha = \lambda$, $\operatorname{tg} \beta = 2\lambda$, $\operatorname{tg} \gamma = 3\lambda$.

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} [180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

vagyis

$$3\lambda = -\frac{\lambda + 2\lambda}{1 - \lambda \cdot 2\lambda} = -\frac{3\lambda}{1 - 2\lambda^2},$$

amiből

$$1 - 2\lambda^2 = -1,$$

azaz

$$\lambda^2 = 1.$$

Mivel λ nem lehet negatív (mert akkor a háromszög minden szöge derékszögnél nagyobb volna), azért $\lambda = 1$, és így

$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \beta = 2, \quad \operatorname{tg} \gamma = 3.$$

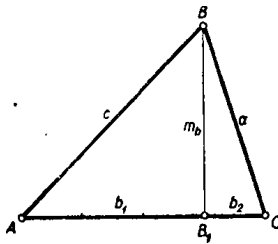
Tehát

$$\begin{aligned} a : b : c &= \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} : \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} : \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3. \end{aligned}$$

Zawadowski Alfréd (Bp., I. Petőfi g. III. o. t.)

II. megoldás: Az I. megoldás alapján $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \beta = 2$, $\operatorname{tg} \gamma = 3$.

Szerkesztünk olyan háromszöget, amelyben a b oldalhoz tartozó magasság $BB_1 = m_b = 3$ (l. ábrát) és a b oldalon lévő két metszet $AB_1 = b_1 = 3$ és $B_1C = b_2 = 1$.



E háromszögben tényleg $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \gamma = 3$ és $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1+3}{1-3} = 2$.

E háromszög oldalai

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{m_b^2 + b_2^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}, \\ b &= b_1 + b_2 = 4, \end{aligned}$$

és

$$c = \sqrt{m_b^2 + b_1^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}.$$

Tehát

$$a : b : c = \sqrt{10} : \sqrt{16} : \sqrt{18} = \sqrt{5} : \sqrt{8} : \sqrt{9} = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3.$$

Lázár László (Mezőkövesd, I. László g. III. o. t.)