

A Hölder egyenlőtlenségben

$$1/s = 1 - 1/r = (r-1)/r, \quad s = r/(r-1).$$

Legyen $k = 2$ és írjunk $b_1 = c_1^{r-1}$, $b_2 = c_2^{r-1}$ -et, ekkor

$$(a_1^r + a_2^r)^{1/r} (c_1^r + c_2^r)^{1-1/r} \geq a_1 c_1^{r-1} + a_2 c_2^{r-1}$$

alakban kapjuk az egyenlőtlenséget. (Egyenlőség áll, ha $a_1/c_1 = a_2/c_2$). Írjunk itt c_1, c_2 helyett $x_1 + x_2$ és $y_1 + y_2$ -t, a_1 és a_2 helyére előbb x_1, y_1 -et, azután x_2, y_2 -t és adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & \left[(x_1^r + y_1^r)^{1/r} + (x_2^r + y_2^r)^{1/r} \right] \left[(x_1 + x_2)^r + (y_1 + y_2)^r \right]^{1-1/r} \geq \\ & \geq (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^{r-1} + (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)^{r-1} = \\ & = (x_1 + x_2)^r + (y_1 + y_2)^r. \end{aligned}$$

A baloldal második tényezőjével, mely pozitív átosztva és osztva még $2 \cdot 2^{1/r}$ -vel az

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1^r + y_1^r}{2} \right)^{1/r} + \left(\frac{x_2^r + y_2^r}{2} \right)^{1/r} \right] \geq \left[\frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^r + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^r}{2} \right]^{1/r}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Egyenlőség áll, ha $\frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{y_1}{y_1 + y_2}$ és $\frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_2}{y_1 + y_2}$, azaz, ha $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. Ez az

$\left(\frac{x^r + y^r}{2} \right)^{1/r}$ függvény tágabb értelemben konvex voltát fejezi ki. Ha eljárásunkat nem a kéttagú, hanem a k tagú Hölder-egyenlőtlenségre alkalmazzuk, akkor ugyanúgy az

$$\left(\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_k^r}{k} \right)^{1/r}$$

tágabb értelemben konvex voltát kifejező egyenlőtlenséghez jutunk.