

Példaképpen vegyük a pozitív értékekre értelmezett $\sqrt{xy}$ függvényt. Erre képezve a szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenségben szereplő két oldal különbségét:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)} - \frac{\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (\sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2})^2}{\sqrt{(x_1+y_2)(y_1+y_2)} + \sqrt{x_1y_1} + \sqrt{x_2y_2}}. \end{aligned}$$

Itt a nevező pozitív, a számláló így alakítható tovább a négyzet tagokra bontása és összevonás után:

$$x_1y_2 + x_2y_1 - 2\sqrt{x_1y_1x_2y_2}.$$

Itt az első két tag az x_1y_2 és x_2y_1 számok számtani közepének, a kivonandó pedig mértani közepüknek a kétszerese. Így a különbség nem lehet negatív. A kifejezés értéke 0 lehet azonban, ha $x_1y_2 = x_2y_1$, azaz $x_1/y_1 = x_2/y_2$. A felület tehát tágabb értelemben konkáv. Az (x, y) síkon a kezdő ponton átmenő egyenesek fölött a felületen is egyenesek húzódnak.

A $\log(a^x + a^y)$ függvényre

$$\begin{aligned} & \frac{\log(a^{x_1} + a^{y_1}) + \log(a^{x_2} + a^{y_2})}{2} = \log \sqrt{(a^{x_1} + a^{y_1})(a^{x_2} + a^{y_2})} \geq \\ & \geq \log(\sqrt{a^{x_1+y_1}} + \sqrt{a^{x_2+y_2}}) = \log\left(a^{\frac{x_1+y_1}{2}} + a^{\frac{x_2+y_2}{2}}\right) \end{aligned}$$

az előbb bizonyított egyenlőtlenség szerint feltéve, hogy $a > 1$. Egyenlőség akkor állhat, ha $a^{x_1+y_1} = a^{x_2+y_2}$. Ha $0 < a < 1$, akkor a fordított egyenlőtlenség érvényes, tehát $\log(a^x + a^y)$ tágabb értelemben konvex, ha $a > 1$ és tágabb értelemben konkáv, ha $0 < a < 1$.

Vizsgáljuk most az $x^{q_1}x^{q_2}$ függvényt ha x, y, q_1 és q_2 pozitív és $q_1 + q_2 = 1$. Itt az

$$\frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2} + x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{2} \quad \text{és} \quad \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{q_1} \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^{q_2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2},$$

kifejezéseket kell összehasonlítani. A kettő hányadosát fogjuk tudni alkalmasan átalakítani, felhasználva, hogy két mennyiség súlyozott mértani közepe kisebb az ugyanazon súlyokkal súlyozott számtani középénél.

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2} + x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2}} = \left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^{q_1} \left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)^{q_2} + \left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^{q_1} \left(\frac{y_2}{y_1+y_2}\right)^{q_2} \leq \\ & \leq q_1 \frac{x_1}{x_1+x_2} + q_2 \frac{y_1}{y_1+y_2} + q_1 \frac{x_2}{x_1+x_2} + q_2 \frac{y_2}{y_1+y_2} = q_1 + q_2 = 1. \end{aligned}$$

Egyenlőség akkor állhat, ha

$$\frac{x_1}{x_1+x_2} = \frac{y_1}{y_1+y_2} \quad \text{és} \quad \frac{x_2}{x_1+x_2} = \frac{y_2}{y_1+y_2},$$

azaz, ha $x_1/y_1 = x_2/y_2$. Az $x^{q_1}y^{q_2}$ függvény tehát, ha $q_1 + q_2 = 1$, tágabb értelemben konkáv. Hasonlóan az $x_1^{q_1}x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$ függvényre, ha $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; q_1, q_2, \dots, q_n$ pozitív és $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, akkor

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^{q_1}x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} + y_1^{q_1}y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}}{2} = \\ & \frac{\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^{q_n}}{\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^{q_n}} = \\ & = \left(\frac{x_1}{x_1+y_1}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2}{x_2+y_2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n}{x_n+y_n}\right)^{q_n} + \left(\frac{y_1}{x_1+y_1}\right)^{q_1} \left(\frac{y_2}{x_2+y_2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{y_n}{x_n+y_n}\right)^{q_n} \leq \\ & \leq q_1 \frac{x_1}{x_1+y_1} + q_2 \frac{x_2}{x_2+y_2} + \dots + q_n \frac{x_n}{x_n+y_n} + q_1 \frac{y_1}{x_1+y_1} + q_2 \frac{y_2}{x_2+y_2} + \dots + q_n \frac{y_n}{x_n+y_n} = \\ & = q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1. \end{aligned}$$

A függvény tehát ismét tágabb értelemben konkáv. Írjuk fel a k tagú szimmetrikus egyenlőtlenséget. Jelöljünk k számú szám n -est $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$, $\dots$, $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ -val, ekkor

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + \dots + x_1^{(k)}}{k}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + \dots + x_2^{(k)}}{k}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n^{(1)} + \dots + x_n^{(k)}}{k}\right)^{q_n} \geq \\ & \geq \frac{x_1^{(1)q_1}x_2^{(1)q_2} \dots x_n^{(1)q_n} + x_1^{(2)q_1} \dots x_n^{(2)q_n} + \dots + x_1^{(k)q_1}x_2^{(k)q_2} \dots x_n^{(k)q_n}}{k}. \end{aligned}$$

Itt, mivel $q_1 + q_2 + \dots q_n = 1$, a nevezőket el is hagyhatjuk.