**I. megoldás:** Ismeretes azonosság

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Mindkét oldalt köbre emelve

$$\cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x$$

vagyis

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 1 = 3\sin^2 x\bigl(1 - \sin^2 x\bigr) = -3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Mindkét oldalt köbre emelve megkapjuk a bebizonyítandó azonosságot. Ezzel tételünket bebizonyítottuk, mert helyes azonosságból indultunk ki és mindenütt csak egyértelmű műveleteket hajtottunk végre.

*Harza Tibor* (Székesfehérvár, József Attila g. I.o.t.)

**II. megoldás:** A baloldal két szám köbének összege, amely felbontható az $a^3+b^3=(a+b)\bigl(a^2-ab+b^2\bigr)$ azonosság alapján két tényező szorzatára, amelynek egyike a két szám összege. Elég utóbbiról bizonyítani, hogy nullával egyenlő, vagyis bizonyítandó, hogy nullával egyenlő, vagyis bizonyítandó, hogy

$$\Bigl[\bigl(\sin^2 x\bigr)^3 + \bigl(\cos^2 x\bigr)^3 - 1\Bigr] + 3\sin^2 x\cos^2 x = 0.$$

Legyen $\sin^2 x = u$, akkor $\cos^2 x = 1 - u$, és így (1) bal oldala

$$u^3 + (1-u)^3 - 1 + 3u(1-u) = u^3 + 1 - 3u + 3u^2 - u^3 - 1 + 3u - 3u^2,$$

ami tényleg – $u$-tól függetlenül – azonosan egyenlő 0-val.

*Tolnai Tibor* (Szombathely, Nagy Lajos g. II.o.t.)