

Távolítsuk el a szokásos módon a gyökjeleket. Vigyük át a baloldal második tagját a jobboldalra, akkor négyzetre emelés, rendezés és 2-vel való egyszerűsítés után

$$2\sqrt{x-4} - 4 = \sqrt{4x - 16\sqrt{x-4}}$$

Még egyszer négyzetre emelve és rendezve kapjuk, hogy

$$0 = 0.$$

Eszerint tehát azonossággal volna dolgunk, de mégsem mondhatjuk, hogy x minden értéke kielégíti egyenletünket, mert a kétszeri négyzetre emelés folytán kerülhetett be hamis gyök, sőt végtelen sok hamis gyök is. Meg kell tehát vizsgálni, hogy eredeti egyenletünket milyen x értékek elégítik ki.

Mindenekelőtt állapítsuk meg, hogy egyenletünk csak akkor van értelmezve, ha $x \geq 4$

Eredeti egyenletünk így is írható:

$$\sqrt{(2\sqrt{x-4}-3)^2} + \sqrt{(2\sqrt{x-4}-4)^2} = 1,$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a baloldal, ha x -et 4-től indulva növeljük. Mivel a négyzetgyökön annak pozitív értékét szoktuk érteni, így az első négyzetgyök $3 - 2\sqrt{x-4}$ -et jelent, amíg $2\sqrt{x-4} \leq 3$ azután pedig $2\sqrt{x-4} - 3$ -at. Mivel az előbbi egyenlőtlenség, mindkét oldalán pozitív szám áll, vagy 0, ha $x \geq 4$, így négyzetre emelhetünk és kapjuk, hogy

$$\sqrt{(2\sqrt{x-4}-3)^2} = \begin{cases} 3 - 2\sqrt{x-4}, & \text{ha } 4 \leq x \leq \frac{25}{4}, \\ 2\sqrt{x-4} - 3, & \text{ha } x \geq \frac{25}{4}, \end{cases}$$

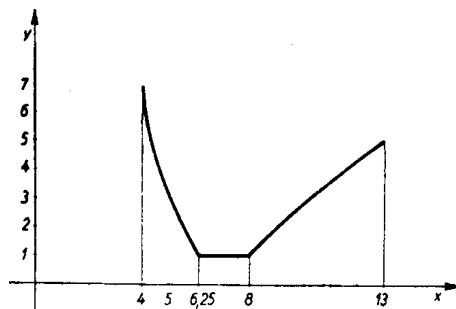
hasolóan

$$\sqrt{(2\sqrt{x-4}-4)^2} = \begin{cases} 4 - 2\sqrt{x-4}, & \text{ha } 4 \leq x \leq 8, \\ 2\sqrt{x-4} - 4, & \text{ha } x \geq 8, \end{cases}$$

Így

$$\sqrt{(2\sqrt{x-4}-3)^2} + \sqrt{(2\sqrt{x-4}-4)^2} = \begin{cases} 7 - 4\sqrt{x-4}, & \text{ha } 4 \leq x \leq \frac{25}{4} \\ 1, & \text{ha } \frac{25}{4} \leq x \leq 8 \\ 4\sqrt{x-4} - 7, & \text{ha } 8 \leq x \end{cases}$$

A függvény menetét az ábrán látható görbe szemlélteti.



Látjuk tehát, hogy az (1) egyenlet minden olyan x -re teljesül, amely $\frac{25}{4} = 6,25$ és 8 közé esik (a határpontokat is beleértve) tehát végtelen sok x értékre, azonban távolról sem minden x értékre. Az ezektől különböző x értékek nem elégítik ki eredeti egyenletünket, hanem csak a kétszeri négyzetre emelés után nyert egyenlőségnek tesznek eleget.

Megjegyzés: Ha a megoldás folyamán helytelenül különböző intervallumokban érvényes kifejezéseket kapcsolunk össze, akkor kapjuk »gyök« gyanánt az $x = \frac{25}{4}$ ill. $x = 8$ értékeket, mint a két-két szomszédos intervallumnak közös határpontját.