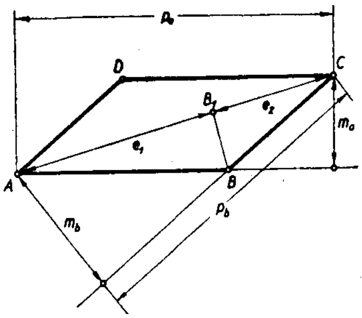
I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Pythagoras tételét írjuk fel rendre a következő négy derékszögű háromszögre : $ACC_1\triangle$, $ACA_1\triangle$, $CBC_1\triangle$ és $ABA_1\triangle$.

$$e^2 = p_a^2 + m_a^2, \tag{1}$$
$$e^2 = p_b^2 + m_b^2, \tag{2}$$
$$m_a^2 = b^2 - (p_a - a)^2, \tag{3}$$
$$m_b^2 = a^2 - (p_b - b)^2. \tag{4}$$

(1) és (2) összegébe behelyettesítve (3), ill. (4)-ből m_a^2 ill. m_b^2 értékét

$$2e^2 = p_a^2 + p_b^2 + b^2 - (p_a - a)^2 + a^2 - (p_b - b)^2 = 2ap_a + 2bp_b,$$

vagyis

$$e^2 = ap_a + bp_b.$$

Beliczky Géza (Czelldömölk, Gábor Áron g. II. o. t.)

II. megoldás: Bocsássuk a B csúcspontból (1. ábra) a BB_1 merőlegest az e átlóra. $AB_1 = e_1$, $B_1C = e_2$. $ABB_1\triangle \sim ACC_1\triangle$, mert mindkettő derékszögű és egy hegyes szögük közös. Tehát

$$e_1 : a = p_a : e, \quad \text{vagyis} \quad ap_a = e_1 e. \tag{1}$$

Hasonlóképpen $CBB_1\triangle \sim CAA_1\triangle$, és így

$$e_2 : b = p_b : e, \quad \text{vagyis} \quad bp_b = e_2 e. \tag{2}$$

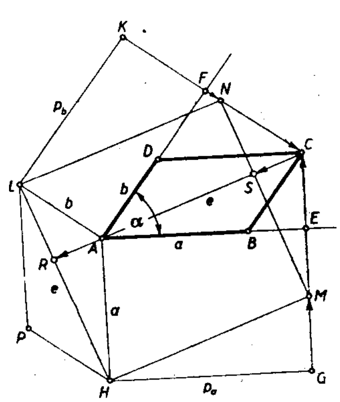
(1) és (2) összege

$$ap_a + bp_b = e_1 e + e_2 e = e(e_1 + e_2) = e^2.$$

Pátkai György (Bp., IX., Fáy András g. II. o. t.)

Ez a megoldás lényegében megegyezik azzal, amikor az aránypárok helyett a $BAC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ cosinusával dolgozunk.

III. megoldás: Tételünket területátalakítással is bizonyíthatjuk. A C pont merőleges vetülete az AB és AD oldalakra legyen E ill. F (2. ábra).



2. ábra

Szerkesszünk $AE = p_a$ fölé, $AEGH$ téglalapot úgy, hogy $AH = a$, vagyis a téglalap területe ap_a. Hasonlóképpen $AFKL$ területe bp_b.

Húzzuk meg a H-ból ill. L-ből az $LP||AH$ és $HP||AL$ egyeneseket. Ha a keletkező $ALPH$ paralelogrammát A körül az óramutató járásával egyirányban 90 fokkal elforgatjuk, akkor AL átmegy AD-be és AH pedig AB meghosszabbításába. Így $HALP \simeq ABCD$ és előbbi 90 fokkal van elforgatva utóbbihoz képest, amiből következik, hogy $HL = AC = e$ és $HL \perp AC$.

Ha az $AHGE$ téglalap GE oldalát saját meghosszabbításában eltoljuk, amíg az E pont C-be és a G pont M-be kerül, akkor a nyert $AHMC$ paralelogramma területe nyilván egyenlő a téglalap területével, amely ap_a.

Ugyanígy eltoljuk a KF szakaszt saját meghosszabbításában NC-be, akkor nyilván az $ALNC$ paralelogramma területe is bp_b mint az $ALKF$ téglalapé.

Ha most a két paralelogramma közös AC oldalát toljuk el saját meghosszabbításában, amíg az A pont R-be és a C pont S-be ér, akkor a két paralelogramma átalakult a velük egyenlő területű $HLNM$ négyzetté, amelynek területe e^2. Tehát tényleg
$$ap_a + bp_b = e^2.$$

Biczó Géza (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)