

x^n -t jelöljük y -nal, akkor egyenletünket negyedfokú egyenletre vezettük vissza

$$y^4 - 4y - 1 = 0$$

Az egyenlet baloldalát két teljes négyzetté egészítjük ki.

$$\begin{aligned}y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 - 4y - 2 &= 0, \\(y^2 + 1)^2 - 2(y + 1)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Vagyis

$$(y^2 + 1)^2 = 2(y + 1)^2.$$

Ezzel a feladat megoldását visszavezettük két másodfokú egyenlet megoldására.

$$\begin{aligned}y^2 + 1 &= \pm\sqrt{2}(y + 1) \\y^2 + \sqrt{2}y + 1 + \sqrt{2} &= 0, \quad y^2 - \sqrt{2}y + 1 - \sqrt{2} = 0.\end{aligned}$$

Az első másodfokú egyenlet gyökei

$$\begin{aligned}y_{1,2} &= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 - 4\sqrt{2}}}{2}; \\y_{1,2} &= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}(\sqrt{-1 - 2\sqrt{2}})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-1 \pm \sqrt{-1 - 2\sqrt{2}} \right]\end{aligned}$$

Ezek a gyökök nem valós számok.

A második egyenlet gyökei

$$y_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 \pm \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}} \right].$$

y ismeretében x értéke meghatározható.

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Ha a komplex megoldásokat is figyelembe vesszük, akkor az egyenletnek $4n$ gyöke van.

Megoldotta: Dávid P., Seitz K.

Megjegyzés: Hogy a negyedfokú egyenletnek csak két valós gyöke van az a szemléletből nyilvánvaló, ha az egyenletet grafikusán akarjuk megoldani $y = x^4$ és az $y = 4x + 1$ egyenes mutatja, hogy a két vonalnak csak két metszéspontja van. Ez a két valós gyök a $(-1, 0)$ illetve $(1, 2)$ számközben van, mert $y = x^4 - 4x - 1$ függvény értéke az $x = -1$ helyen pozitív, a 0 helyen negatív, tehát a függvény folytonossága miatt valahol metszi az x tengelyt.

Ugyanez a megfontolás az $(1, 2)$ számközre is.