

I. megoldás: Az a célunk, hogy ezt az egyenletrendszert helyettesítsük egy olyan egyenletrendszerrel, amelynek gyökei már ismert összefüggések alapján meg tudjuk határozni.

Az első egyenletet négyzetre emeljük, majd levonjuk az így kapott egyenletből a másodikat, ekkor

$$xy + yz + zy = 0$$

egyenlethez jutunk.

Felhasználva az előbbi feladatban szereplő azonosságokat

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1 \cdot (1 - 0) = 1, \text{ de } x^3 + y^3 + z^3 = \frac{89}{125}$$

tehát

$$3xyz = \frac{89}{125} - 1 = -\frac{36}{125}$$

ebből

$$xyz = -\frac{12}{125}$$

Tehát az eredeti egyenletrendszer helyett tekinthetjük az

$$x + y + z = 1$$

I.

$$xy + yz + zx = 0$$

$$xyz = -\frac{12}{125}$$

egyenletrendszert.

Ha x, y, z -t tekintjük úgy is, hogy egy harmadfokú egyenletnek gyökei, mégpedig a

$$(t - x)(t - y)(t - z) = 0 \quad (\text{gyöktényezős előállítás}).$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek együtthatói

$$t^3 \text{ együtthatója} = 1$$

$$t^2 \text{ együtthatója} = (x + y + z) = 1$$

$$t \text{ együtthatója} = xy + yz + zx = 0$$

az állandó tag

$$-xyz = \frac{12}{125}.$$

Vagyis az egyenlet

$$t^3 - t^2 + \frac{12}{125} = 0.$$

Ezt a harmadfokú egyenletet azonban könnyen meg tudjuk oldani

$$t^3 = t^2 - \frac{12}{125}$$

$$\frac{8}{125} \text{-öt levonva mindkét oldalból: } t^3 - \frac{8}{125} = t^2 - \frac{20}{125} = t^2 - \frac{4}{25}.$$

$$\text{A jobboldalt szorzattá alakítva } t^2 - \frac{4}{25} = \left(t + \frac{2}{5}\right)\left(t - \frac{2}{5}\right).$$

A baloldalt $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság szerint felbontva

$$\left(t - \frac{2}{5}\right)\left(t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{4}{25}\right) = \left(t + \frac{2}{5}\right)\left(t - \frac{2}{5}\right)$$

ebből $t_1 = \frac{2}{5}$, ezen gyök figyelembevétele után $t - \frac{2}{5}$ -del osztva

$$t^2 - \frac{3}{5}t - \frac{6}{25} = 0,$$

innen

$$t = \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{24}{25}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{10}$$

És így az egyenletrendszer megoldásai:

$$x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{3 + \sqrt{33}}{10}, \quad z = \frac{3 - \sqrt{33}}{10}.$$

Nyilvánvaló az egyenlet szimmetrikus felépítéséből, hogy ezen 3 érték bármelyikét tekinthetjük x -nek, vagy y -nak, vagy z -nek. Vagyis ennek az egyenletrendszernek három tizedes pontosságig számolva az

$$(x, y, z) \approx (0,4; 0,875; -0,275)$$

értékek a megoldásai tetszésszerű sorrendben.

Megoldotta: ifj. Csonka P., Dávid P., Seitz K.

II. megoldás: Emeljük négyzetre az első egyenletet és vegyük tekintetbe a másodikat is. Akkor abból, hogy:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx),$$

következik, hogy

$$xy + yz + zx = 0.$$

A 264*. feladat eredményének:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx),$$

és egyenleteinknek összehasonlítása adja xyz értékét:

$$xyz = -\frac{12}{125}.$$

x , y és z tehát gyökei a következő egyenletnek:

$$u^3 - u^2 + \frac{12}{125} = 0.$$

A harmadfokú egyenlet megoldása céljából az x^2 -es tagot el akarjuk tüntetni. Ha új ismeretlennek behozzuk v -t:

$$u = v + \frac{1}{3},$$

akkor ennek helyettesítése után a v -re kapott egyenlet lesz:

$$v^3 - \frac{1}{3}v + \frac{74}{27 \cdot 125} = 0.$$

Ebből most már a harmadfokú egyenletek megoldási eljárása szerint v értéke meghatározható. Most azonban egyszerűen célhoz juthatunk, ha még egyszer új ismeretlent vezetünk be:

$$v = \frac{2}{3}w.$$

Ekkor ugyanis az új egyenlet ilyen alakúra hozható:

$$4w^3 - 3w + \frac{37}{125} = 0,$$

és ez emlékeztet a $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ összefüggésre, ami így is írható:

$$4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0.$$

w tehát nem más, mint $\sin\alpha$, hogyha

$$\sin 3\alpha = \frac{37}{125} = 0,2960.$$

Határozzuk meg tehát ebből 3α -t, azután a táblázatból kikereshetjük $\sin\alpha = w$ értékét is.

Visszakeresve a $\sin 3\alpha = 0,2960$ értéket, a táblázatban ezt a $17,22^\circ$ -nál találjuk 3α azonban nemcsak ekkora lehet, hanem 360° többszörösével több is:

$$3\alpha = 17,22^\circ + k360^\circ.$$

Csak $k = 0; 1; 2$ értékekre kapunk ebből különböző értéket, tehát

$$\alpha_1 = 5,74^\circ,$$

$$\alpha_2 = 5,74^\circ + 120^\circ = 125,74^\circ,$$

$$\alpha_3 = 5,74^\circ + 240^\circ = 245,74^\circ.$$

A megfelelő sinus-értékek,

$$\begin{aligned}w_1 &= \sin 5,74^\circ = & &= 0,1 \\w_2 &= \sin 125,74^\circ = \sin 54,26^\circ = 0,8117, \\w_3 &= \sin 245,74^\circ = -\sin 65,74^\circ = -0,9117.\end{aligned}$$

w -ből az

$$v = \frac{2}{3}w \quad \text{és} \quad u = v + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}w + \frac{1}{3},$$

vagyis

$$u = \frac{1}{3}(2w + 1).$$

Ennek folytán most már:

$$u_1 = 0,4, \quad u_2 = 0,8745, \quad u_3 = -0,2745.$$

Eredeti egyenletrendszerünkben ezeknek az értékeknek bármelyike választható x -nek, a másik y -nak és a harmadik z -nek.

Megoldotta képlettel, számolási hibákkal: Villányi O.