

I. megoldás: Ha $n = 2$, akkor az $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$ bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. A két oldal különbsége

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} \geq 0,$$

ha x_1 és x_2 pozitív. Egyenlőség csak akkor állhat, ha $x_1 = x_2$.

Próbáljuk meg az általános állítást a tagok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítani. $n = 2$ -re már igazoltuk az állítást. Tegyük fel, hogy valamilyen $n = k$ értékre már bebizonyítottuk az állítást, tehát bármely k pozitív $x_1, \dots, x_k$ számra

$$(1) \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq k.$$

Nézzünk egy $k + 1$ számú pozitív számból: $y_1, y_2, \dots, y_{k+1}$ -ből képzett

$$(2) \quad \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_k}{y_{k+1}} + \frac{y_{k+1}}{y_1}$$

kifejezést. Ha van két szomszédos elem a számok sorozatában, amelyek egyenlők: $y_i = y_{i+1}$, akkor $\frac{y_{i-1}}{y_i} + \frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{y_{i-1}}{y_{i+1}} + 1$.

(Szomszédosnak tekintjük y_{k+1} -et és y_1 -et is. Ekkor $i = k + 1$ és y_{i+1} -et y_1 -gyel kell helyettesíteni; vagy $i = 1$ és y_{i-1} -et y_{k+1} -gyel helyettesíteni.) Így a vizsgálandó kifejezés

$$(3) \quad \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_{i-1}}{y_{i+1}} + 1 + \frac{y_{i+1}}{y_{i+2}} + \dots + \frac{y_{k+1}}{y_1}$$

alakú, tehát egy 1-esből és egy k tagú kifejezésből áll, mely ugyanolyan típusú, mint az (1) egyenlőtlenség baloldala. Így erről tudjuk, hogy értéke legalább $1 + k$. Ha nincs két szomszédos egyenlő tag a sorozatban, akkor is helyettesíthetjük valamilyen i -re $\frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_i}{y_{i+1}}$ -et $\frac{y_{i-1}}{y_{i+1}} + 1$ -gyel és ismét egy (3) alakú kifejezést kapunk, amelyik értéke legalább $k + 1$.

Ebből csak akkor következtethetünk arra, hogy az eredeti kifejezés értéke is legalább $k + 1$, ha tudjuk, hogy a végzett módosítással kisebbitettük az összeget, azaz hogy

$$\frac{y_{i-1}}{y_i} + \frac{y_i}{y_{i+1}} \geq \frac{y_{i-1}}{y_{i+1}} + 1.$$

A két oldal különbsége közös nevezőre hozva

$$\begin{aligned} & \frac{y_{i-1}y_{i+1} + y_i^2 - y_{i-1}y_i - y_iy_{i+1}}{y_iy_{i+1}} = \\ & = \frac{y_{i-1}(y_{i+1} - y_i) + y_i(y_i - y_{i+1})}{y_iy_{i+1}} = \frac{(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})}{y_iy_{i+1}} \end{aligned}$$

Ez a kifejezés akkor pozitív, ha y_i vagy nagyobb y_{i+1} -nél is, y_{i-1} -nél is, vagy mind a kettőnél kisebb. Ilyen y_i biztosan van, például a számok legkisebbike, vagy legnagyobbika. Ezek közül egyet választva y_i -nek (ha $i = k + 1$, akkor y_{i+1} -en y_1 -et értjük, ha pedig $i = 1$, akkor y_{i-1} -en y_{k+1} -et) a (2) kifejezés nagyobb lesz, mint a (3) alatti, ez pedig az indukciós feltevés szerint nem kisebb $k + 1$ -nél. Ha tehát az állítás igaz valamilyen k -ra, akkor igaz $k + 1$ -re is. Ezzel bizonyítottuk, hogy minden n -re igaz.

$n = 2$ -re láttuk, hogy egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a két szám egyenlő. A bizonyítás azt is mutatja, hogy az egyenlőtlenség abban a szigorúbb formában érvényes, hogy egyenlőség csak akkor állhat, ha az adott számok mind egyenlők. Tegyük fel ugyanis, hogy valamilyen k -ra ebben a szigorúbb formában bizonyítottuk az állítást. Ha y_i különbözik y_{i-1} -től is, y_{i+1} -től is, akkor a (2) kifejezés határozottan nagyobb (3)-nál, tehát $k + 1$ -nél is. Ha pl. $y_i = y_{i+1}$, akkor a (2) kifejezés egyenlő a (3)-mal, viszont az indukciós feltevés szerint a (3) kifejezés csak akkor egyenlő $k + 1$ -gyel, ha $y_1 = \dots = y_{i-1} = y_{i+1} = \dots = y_{k+1}$. Mivel viszont $y_i = y_{i+1}$, tehát azt nyertük, hogy $k + 1$ szám esetén is csak akkor állhat egyenlőség, ha minden szám egyenlő.

Ezzel bizonyítottuk ezt az erősebb állítást is.

II. megoldás: A megadott n szám szorzata

$$\frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} \frac{x_n}{x_1} = 1$$

lévén a mértani közepük is 1.

Ismeretes azonban, hogy n szám számtani közepe nagyobb, vagy egyenlő mint mértani közepük. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a tagok egyenlők.

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}}{n} \geq 1,$$

vagyis

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_1} = 1$

vagyis

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n.$$

Dávid Péter (Szentendrei gimn. IV. o.)

Megoldotta: Dömölki B.