

I. megoldás: Azt kell kimutatnunk, hogy a megadott kifejezés 9^2 -nel osztható. E célból a kifejezést átalakítjuk

$$10^n(9n - 1) + 1 = 10^n 9n - (10^n - 1).$$

A különbség mindkét tagja osztható 9-cel, tehát maga a szám is osztható 9-cel. Vizsgáljuk most a 9-cel való osztás hányadosát. Az első részt osztva 9-cel a hányados $n10^n$. A második rész – minthogy n számú 9-es jegyből álló szám – hányadosul n számú 1-es jegyből álló számot ad. Nézzük most meg a hányados ezen két tagját külön-külön a 9-cel való oszthatóság szempontjából. 10 bármely hatványa 9-cel osztva 1 maradékot ad, tehát $n10^n$ -t osztva 9-cel a maradék ugyanannyi, mintha n -et oszthanánk 9-cel. A hányados másik részét osztva 9-cel, a maradék ugyanannyi, mintha a számjegyek összegét, azaz n -et oszthanánk 9-cel. A kettő különbsége 9-cel osztva 0 maradékot ad, vagyis a 9-cel való osztás hányadosa ismét osztható 9-cel. A megadott szám tehát $9 \cdot 9$, azaz 81-gyel osztható.

Megoldotta: Dávid P., Dievald Emilia, Főző Éva, Kalmár L., Lipák I., Osztein P., Villányi O.

II. megoldás: $10^n(9n - 1) + 1 = 9n10^n - (10^n - 1)$. Itt $n10^n$ így írható: $10^n + 10^n + 10^n + \dots + 10^n$. $10^n - 1$ viszont mint két n -edik hatvány különbsége így bontható fel:

$$10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1).$$

Ezeket az azonosságokat behelyettesítve az eredeti kifejezésbe, az

$$9 \left[(10^n - 10^{n-1}) + (10^n - 10^{n-2}) + \dots + (10^n - 10) + 10^n - 1 \right]$$

alakúvá válik.

A zárójelben lévő kifejezések mind $10^n - 10^k$ alakúak, ezek $10^k(10^{n-k} - 1)$ alakúak lévén – oszthatók 9-cel, s így összegük is ugyanilyen tulajdonságú. Ezzel tehát igazoltuk, hogy az adott szám 81-gyel, osztható.

Csere Ilona (Kisfaludy Károly gimn. I/c.)

Megoldotta: Durst E.

III. megoldás: Ha $n = 1$, akkor $10(9 - 1) + 1 = 9 \cdot 10 - (10 - 1) = 9 \cdot 9 = 81$ s így 81-gyel osztható.

A tétel érvényességét minden n -re teljes indukcióval igazoljuk. Tegyük fel, hogy a 81-gyel való oszthatóság igaz n egy bizonyos értékére. Kimutatjuk, hogy ebből következik, hogy $n + 1$ -re is igaz. Vizsgáljuk meg, mennyivel nő a szám értéke, ha n helyébe $n + 1$ -et helyettesítünk.

$$\begin{aligned} & 10^{n+1} [9(n + 1) - 1] + 1 - [10^n(9n - 1) + 1] = \\ & = 9n10^n(10 - 1) - 9 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^{n+1} = \\ & = 81n10^n + 9 \cdot 10^n(10 - 1) = 81 \cdot 10^n(n + 1). \end{aligned}$$

Tehát ha n helyébe $n + 1$ -et teszünk, ezzel 81 többszörösével növeljük a számot, tehát az új szám ismét 81-gyel osztható lesz.

Kántor Sándor (Debreceni gimn. II/b.)

Megoldotta: Dömölki B., Kovács L., Sajó J., Turi I., Zatykó L., Zobor E.