

Próbáljuk meg az $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ egyenlet bal oldalát $r(x+s)^3 - t(x+u)^3$ alakban írni. Ekkor egy harmadik gyökvonással elsőfokú egyenletre jutunk. Ez az említett feladatban szereplő egyenletrendszerre vezet: $r - t = a$, $rs - tu = \frac{b}{3}$, $rs^2 - tu^2 = \frac{c}{3}$, $rs^3 - tu^3 = d$. Az ott használt módszerrel kapjuk, hogy s és u az $X^2 - AX + B = 0$, egyenlet két gyöke, ahol

$$A = \frac{bc - 9ad}{b^2 - 3ac}, \quad B = \frac{c^3 - 3bd}{b^2 - 4ac},$$

$$(s-u)r = \frac{b}{3} - au = C, \quad (s-u)t = \frac{b}{3} - as = D.$$

Ezek felhasználásával egyenletünk így írható: $r(x+s)^3 = t(x+u)^3$, tehát $\sqrt[3]{r}(x+s) = \varrho \sqrt[3]{t}(x+u)$, ahol ϱ egy olyan számot jelent, melynek köbe 1, vagyis a $\varrho^3 - 1 = (\varrho^2 + \varrho + 1)(\varrho - 1) = 0$ egyenlet valamelyik gyökét, tehát $\varrho_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho_3 = 1$. Ezeket a mennyiségeket harmadik egységgyökeknek nevezzük. Figyeljük meg, hogy

$$\varrho_1^2 = \varrho_2, \quad \varrho_2^2 = \varrho_1, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = \varrho_1 + \varrho_1^2 = \varrho_2 + \varrho_2^2 = -1.$$

Egyenletünk megoldásai tehát:

$$x = \frac{\varrho u \sqrt[3]{t} - s \sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r} - \varrho \sqrt[3]{t}}, \quad \text{ahol } \varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \text{vagy } \varrho_3.$$

ϱ mindhárom értéke mellett igaz a következő azonosság:

$$a^3 - b^3 = (a^2 + \varrho ab + \varrho^2 b^2)(a - \varrho b).$$

Ezt felhasználva előző egyenleteink szerint:

$$x = \frac{(\varrho u \sqrt[3]{t} - s \sqrt[3]{r})(\sqrt[3]{r^2} + \varrho \sqrt[3]{rt} + \varrho^2 \sqrt[3]{t^2})}{t - r} =$$

$$= \frac{tu - sr + \varrho(u-s)\sqrt[3]{rt^2} + \varrho^2(u-s)\sqrt[3]{rt^2}}{r - t} =$$

$$= -\frac{b}{3a} + \frac{\varrho}{a} \sqrt[3]{-(s-u)r[(s-u)t]^2} + \frac{\varrho^3}{a} \sqrt[3]{-(s-u)r[(s-u)t]^2} =$$

$$= -\frac{b}{3a} + \frac{\varrho}{a} \sqrt{-C^2 D} + \frac{\varrho^2}{a} \sqrt{-C D^2}.$$

Áttekinthetatlenné válna a formula, ha C -t és D -t kifejeznénk a, b, c, d -vel, célszerű ezért először az egyenletet lehetőleg egyszerűsíteni. Először is oszthatunk a -val, de ezen kívül ki is küszöbölhetjük pl. a másodfokú tagot $x + a$ helyett új változót vezetve be és a -t alkalmasan választva. Az átrendezett egyenlet másodfokú tagjának együtthatója ekkor $\frac{b}{a} - 3a$, tehát $a = \frac{b}{3a}$ -nak választható. Ezeket az átalakításokat elvégezve ilyen alakú egyenlethez jutunk: $x^3 + px + q = 0$. Elég tehát az ilyen alakú egyenletek megoldását felírni. Ekkor a, b, c, d helyébe $1, 0, p, q$ kerül, tehát

$$A = \frac{3q}{p}, \quad B = -\frac{p}{3}, \quad u, s = +\frac{3q}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{3q}{2p}\right)^3 + \frac{p}{3}}, \quad C = -u, \quad D = -s, \quad \text{tehát}$$

$$x = \varrho \sqrt[3]{-\frac{p}{3}u} + \varrho^2 \sqrt[3]{-\frac{p}{3}s} =$$

$$= \varrho \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \varrho^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}.$$

Ezt a formulát nevezik CARDANO-féle formulának.

Megjegyzés: A 91 b feladatra Vörös Miklós „nem”-mel válaszol és be is bizonyítja igazát, mármint azt, hogy nem bontható fel a kifejezés két *olyan* elsőfokú kifejezés köbére, melyben minden együttható *racionális*. A 92. feladatnál Kővári Tamás állítja azt, hogyha (a fenti jelölésekkel) $A^2 - 4B < 0$, akkor nem oldható meg a harmadfokú egyenlet, mert nem sikerül a két köbre bontás. Neki is igaza van, mert valóban nem sikerül a felbontás *valós* együtthatós kifejezések köbére. Mindkét megjegyzés arra mutat, hogy a feladat hiányosan van megfogalmazva. Minden ilyen felbontási kérdésnél meg kell azt is mondani, hogy a keresett kifejezések együtthatói milyen fajta számok lehetnek. Ha erre külön utalás nincs, akkor általában úgy szoktuk érteni a feladatot – ebben állapodjunk is meg a továbbiakra –, hogy együtthatóul *bármely valós, vagy komplex szám* szerepelhet. Ezt indokolja az pl. hogy éppen ha egyenletet akarunk

megoldani, akkor már másodfokúnál komplexek lehetnek a gyökök, ha valósak voltak is az együtthatók, tehát valahol bele kell jönnie komplex számoknak számításainkba.

Harmadfokú egyenletnél még meglepőbb a helyzet. ϱ és ϱ^2 a három lehetséges érték közül kettőre konjugált komplex számpár. A formula három valós eredményt csak úgy adhat, ha vagy mind a kettő ugyanazzal a valós számmal van megszorozva (ebben az esetben a két gyök egyenlő), különben csak, ha ϱ és ϱ^2 együtthatói konjugált komplexek, tehát épp az $A^2 - 4B < 0$ esetben. Azt is meg lehet mutatni, hogy nem is lehet alpműveletek és gyökvonások segítségével olyan formulát találni, mellyel mindig megkapnánk a három gyököt, mégpedig ha mind a három valós, akkor csupa valós számmal számolva. Három különböző valós gyökű egyenletet pedig könnyű felírni, pl. $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$. Ha itt beszoroztok és a fenti módon számíttjátok ki a gyököket, azokban nehezen ismernétek rá az 1, 2, 3 számokra.

Sokszor még akkor sem könnyű látni a formulából, hogy mennyi is az x , hogyha egy valós gyököt kapunk valós alakban. Számítsuk ki pl. az $(x-1)(x^2+x+4) = x^3+3x-4 = 0$ egyenlet valós gyökét, azután próbáljuk megmutatni, hogy az 1. (A szorzatalakban a vak is látja, hogy a valós gyök $x = 1$; a másik két gyök komplex szám.

De van egy harmadik nagy hibája is a megoldási formulának, t. i. nem található minden egyenlethez. Negyedfokúhoz még van. Aki nagyon ügyes köztetek, az vissza is tudja vezetni a harmadfokúéra hasonló módon, mint fentebb a harmadfokúét meg a másodfokú egyenlet megoldására vezettük vissza. Bebizonyították azonban, hogy ötöd- és magasabb fokú egyenletre nincs olyan általános megoldási formula, mely az együtthatókból véges számú alpművelettel és gyökvonással adná meg a megoldást.

A gyakorlatban egész együtthatós egyenleteknek meg lehet keresni az esetleges egész és racionális gyökeket, a többi meg közelítő eljárásokkal szokták a szükséges pontossággal kiszámítani.

Szerk.