

Olyan töröttvonal létezését bizonyítjuk, amelyik nem záródik. Világos, hogy nem változtat a feladaton, ha azt tesszük fel, hogy *legalább* $2kn + 1$ átló van berajzolva.

A feladat állítását k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $k = 0$ esetén 1 átló van berajzolva, és ez megfelel a feltételnek.

Tegyük most fel, hogy adott (elegendő nagy) n esetén az n -oldalú sokszögekre k -nak valamilyen j értékével igaz az állítás, és egy n -szögben $2(j + 1)n + 1$ átló van berajzolva. Ekkor az olyan csúcsoknál (ha vannak), amelyekből egy berajzolt átló indul, hagyjuk egyelőre figyelmen kívül ezt az átlót, amelyekből pedig egynél több átló indul, ott a hozzá a két oldalon legközelebbi csúcshoz vezető átlót. Ezzel legfeljebb $2n$ átlót hagyunk el. Ekkor legalább $2jn + 1$ berajzolt átló marad meg, tehát kiválasztható közülük egy $2j + 1$ átlóból álló töröttvonal. Jelöljük ebben az első és utolsó átlót A_0A_1 , illetve $A_{2j}A_{2j+1}$ -gyel.

A töröttvonal az A_0A_1 , illetve az $A_{2j}A_{2j+1}$ egyenesek egyik oldalára esik, hiszen nem megy át egy ponton egynél többször, és a sokszög konvex. Miután maradt még a végpontokból induló, behúzott átló, így azokban két-két átlót hagyunk figyelmen kívül. Ekkor azonban hozzácsatolhatjuk mindegyik végponthoz azt az eddig figyelmen kívül hagyott átlót, amelyik a szélső szakasz egyenesének a másik oldalára esik, mint a töröttvonal. Ezzel $2(j + 1)n + 1$ szakaszból álló töröttvonalat kapunk. A bizonyítandó állítás helyessége tehát öröklődik $2(j + 1)n + 1$ átló berajzolása esetére is, így minden k -ra igaz.

A feladat második állítására térve az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a sokszög szabályos. A könnyebb tárgyalásmód kedvéért mondjunk egy átlót h hosszúságúnak, ha az egyik oldalára a sokszögnek h oldala esik, a másikra ennyi vagy ennél több. Megjegyezzük, hogy egy n oldalú sokszögbe akkor rajzolható be nk átló, ha páratlan n esetén $n \geq 2k + 3$, páros n esetén pedig $n \geq 2k + 4$.

Belátjuk, hogy az állítás igazolására alkalmas a következő konstrukció: páratlan n esetén minden csúcsból meghúzzuk a k leghosszabb átlót, páros n esetén pedig a k leghosszabb átlót a „legesleghosszabb” (a szemközti csúcsokhoz vezető) kivételével. Így minden csúcs $2k$ átló végpontja, tehát $2kn$ átlóvégpont, azaz kn átló jön létre.

Tegyük fel, hogy kiválasztható r szakaszból álló, $A_0A_1 \dots A_{r-1}A_r$ nyílt töröttvonal, amelyik egy ponton sem megy át egynél többször. Az A_0A_1 egyenes határolta egyik felsíkba esik az egész töröttvonal, így nem mehet át a töröttvonal az ellenkező oldalra eső felsík belsejében levő sokszögcsúcsokon, és ugyanez mondható az $A_{r-1}A_r$ egyenesről is (4. ábra). Ez a két átló nem metszi egymást, így az A_i csúcsok a sokszög területének az egyenesek közti két szakaszán helyezkednek el.

Ha n páratlan, $n = 2m + 1$, akkor a kizárt sokszögcsúcsok száma legalább $2(m - k)$, a töröttvonalak száma legfeljebb $n - 2(m - k) = 2k + 1$, és így a töröttvonal $r \leq 2k$ szakaszból áll.

Ha az oldalszám páros, $n = 2m$, akkor a berajzolt leghosszabb átló hossza $m - 1$, a legrövidebbé $m - k$. A fenti gondolatmenettel ezért csak $r \leq 2k + 1$ adódik, így gondosabban szemügyre kell venni a konstrukciót.

Ha valamelyik íven van két szomszédos csúcs, akkor az ezeken átmenő egyenesnek a másik oldalán, mint amelyiken a másik ív van, nem lehet csúcsa a töröttvonalnak. Ekkor

$$r + 1 \leq n - 3(m - k - 1), \quad \text{vagyis} \quad r \leq 2k + (k + 2 - m) \leq 2k$$

az előrebocsátott megjegyzés szerint.

Ha viszont a csúcsok felváltva a két íven vannak (a töröttvonal „cikkcakkban” halad), és pl. az A_0A_1 egyenesnek a töröttvonalat nem tartalmazó oldalára a sokszög területének a felénél nagyobb része, tehát legalább m csúcsa esik, akkor a töröttvonal csúcsainak száma legfeljebb $k + 1$, mivel az $A_{r-1}A_r$ egyenesnek a töröttvonalat nem tartalmazó oldalán legalább $m - k - 1$ csúcs van (5. ábra).

Ha a sokszög középpontja a két átló egyenese közt, tehát valamelyik $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ háromszögben van (6. ábra), akkor az A_i -vel szemközti sokszögcsúcs nem lehet a töröttvonal csúcsa, így a töröttvonalnak legfeljebb

$$2m - 2(m - k - 1) - 1 = 2k + 1$$

csúcsa lehet, s így legfeljebb $2k$ átlóból állhat.

Megjegyzés. A gondolatmenet pontosabb elemzésével belátható, hogy zárt töröttvonalat is megengedve az eljárás csak hatszög és $k = 1$ esetén enged meg 3 ($= 2k + 1$) hosszúságú töröttvonalat, ekkor azonban a 7. ábrán látható ellenpélda szolgáltat megoldást.



