

I. megoldás. Jelöljük az átlók metszéspontját E -vel, az $AB, BC, CD, DA, AE, EC, BE, ED$ szakaszok hosszát rendre $a, b, c, d, e_1, e_2, f_1, f_2$ -vel (1. ábra). Ekkor azt kell igazolnunk, hogy $bd \geq ac$.

Mivel minden tényező pozitív, azért ez egyenértékű annak igazolásával, hogy $b^2 d^2 \geq a^2 c^2$.

Mindegyik tényező egy-egy derékszögű háromszög átfogója. Ezeket Pitagorasz tétele alapján kifejezve az

$$(e_2^2 + f_1^2)(e_1^2 + f_2^2) \geq (e_1^2 + f_1^2)(e_2^2 + f_2^2)$$

egyenlőtlenséget kell igazolnunk, vagy átrendezve a következőt:

$$(e_1^2 - e_2^2)(f_1^2 - f_2^2) \geq 0.$$

Ez viszont igaz, mert az AEB és a CED háromszögek hasonlóak, így

$$e_1 \geq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \geq f_2 \quad \text{vagy} \quad e_1 \leq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \leq f_2.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha a két háromszög egybevágó, azaz az átlók felezik egymást, tehát a trapéz paralelogramma, mivel pedig az átlói merőlegesek, így rombusz. Ekkor az oldalak egyenlők, s így a két szorzat valóban egyenlő.

II. megoldás. Ismeretes – és a Pitagorasz-tétel négyszeri alkalmazásával könnyen belátható – hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek, ha a szemközti oldalpárok négyzetének az összege egyenlő. Az előző megoldás jelöléseit használva fennáll tehát a következő egyenlőség:

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2.$$

Átrendezve és teljes négyzetté kiegészítve ebből az

$$(1) \quad (b + d)^2 - (a + c)^2 = 2(db - ac)$$

egyenlőség adódik. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy a bal oldal nemnegatív. Ehhez kiegészítjük az ábrát. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A -n túl az $AF = c$ szakasszal, továbbá jelöljük C tükörképét E -re G -vel (2. ábra). Ekkor $ACDF$ paralelogramma, a $BCDG$ deltoidban pedig $BG = b$ és $GD = c$. Így $AGDF$ szimmetrikus trapéz, tehát $GF = d$.

A BGF háromszögből a háromszögegyenlőtlenség szerint

$$b + d \geq a + c,$$

tehát (1) bal oldala valóban nemnegatív. Egyenlőség akkor áll fenn, ha G A -ba esik, vagyis a trapéz átlói felezik egymást, továbbá feltétel szerint merőlegesek, tehát a négyszög rombusz.

III. megoldás. Húzzunk párhuzamosokat a trapéz csúcsain át az átlókkal. Ezek egy $PQRS$ téglalapot határoznak, amit az átlók résztéglalapokra osztanak, így $PE = a$, $QE = b$, $RE = c$, $SE = d$ (3. ábra). Az ABE és CDE háromszögek hasonlóak, így az $APBE$ és a $CRDE$ téglalapok is, tehát a PE és az ER átló egy egyenesbe esik, együtt a nagy téglalap átlóját alkotják.

Az ábrán ac eszerint úgy jelenik meg, mint a téglalap köré írt kör átmérője két szeletének szorzata. Messe SE a kört másodszor az S' pontban. Tudjuk, hogy ekkor

$$ac = SE \cdot ES' = d \cdot ES'.$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy $ES' \leq b$.

Feltehetjük, hogy $a \geq c$. Ekkor a kör O középpontja a PE szakaszra esik. A QOS' háromszög egyenlő szárú. Alapjának a felező merőlegese O -n megy keresztül, tehát az OR szakaszra eső E pontra

$$ES' \leq EQ = b,$$

és ezt kellett belátnunk. Ismét látható, hogy akkor áll fenn egyenlőség, ha O és E egybeesik, amikor is a trapéz rombusz.



