

A pontokat A -ból hozzájuk mutató helyvektoraikkal jellemezzük. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Ezek nem párhuzamosak, tehát a sík vektorai felírhatók egyértelműen ezek számszorosaiként. Így

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} = \beta \mathbf{b} + \delta \mathbf{d}$$

alkalmas β , δ számokkal.

Mivel E az AB és a CD egyenesen van, F az AD és a BC egyenesen, így

$$\mathbf{e} = \overrightarrow{AE} = \varepsilon \mathbf{b} = \lambda \mathbf{d} + (1 - \lambda) \mathbf{c} = (1 - \lambda) \beta \mathbf{b} + ((1 - \lambda) \delta + \lambda) \mathbf{d}, \mathbf{f} = \overrightarrow{AF} = \varphi \mathbf{d} = \mu \mathbf{b} + (1 - \mu) \mathbf{c} = ((1 - \mu) \beta + \mu) \mathbf{b} + (1 - \mu) \delta \mathbf{d}.$$

Itt λ és μ nem lehet sem 0 sem 1, mert E különbözik C -től és D -től, F pedig B -től és C -től, különben A , C és D , illetőleg A , B és C egy egyenesen volna. Az előállítások egyértelműségéből következik, hogy

$$\varepsilon = (1 - \lambda) \beta, \quad \delta = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \varphi = (1 - \mu) \delta, \quad \beta = \frac{\mu}{\mu - 1},$$

amiből

$$\varepsilon = \frac{(1 - \lambda) \mu}{\mu - 1}, \quad \varphi = \frac{\lambda(1 - \mu)}{\lambda - 1}.$$

Ezeket felhasználva

$$(1) \quad \mathbf{c} = \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{b} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \mathbf{d}, \quad \mathbf{e} = \frac{(1 - \lambda) \mu}{\mu - 1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{f} = \frac{\lambda(1 - \mu)}{\lambda - 1} \mathbf{d}.$$

Egy $\mathbf{p}$ helyvektorú P pont akkor van az egyes körökön, ha a belőle a megfelelő átmérő végpontjaihoz mutató vektorok merőlegesek, azaz 0 a skaláris szorzatuk³. A feladatban szereplő körök ezért így jellemezhetők

$$\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{c}) = \mathbf{p}^2 - \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{p} \mathbf{b} - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \mathbf{p} \mathbf{d} = 0, (\mathbf{p} - \mathbf{b})(\mathbf{p} - \mathbf{d}) = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \mathbf{b} - \mathbf{p} \mathbf{d} + \mathbf{b} \mathbf{d} = 0, (\mathbf{p} - \mathbf{e})(\mathbf{p} - \mathbf{f}) = \mathbf{p}^2 - \frac{(1 - \lambda) \mu}{\mu - 1} \mathbf{p} \mathbf{b} - \frac{\lambda(1 - \mu)}{\lambda - 1} \mathbf{p} \mathbf{d} = 0.$$

Jelöljük a bal oldalakat K_{AC} , K_{BD} , K_{EF} -fel. A feladatot megoldottuk, ha sikerül olyan 0-tól különböző α , γ , η számokat találnunk, amelyekre azonosan teljesül, hogy

$$(2) \quad \alpha K_{AC} + \gamma K_{BD} + \eta K_{EF} = 0,$$

mert ekkor, ha egy P pontra valamelyik két kifejezés 0, akkor a harmadik is, tehát ha P valamelyik két körön rajta van, akkor a harmadikon is.

K_{AC} -ben nem szerepel $\mathbf{b} \mathbf{d}$ -s tag, így bármi is az α , a második kifejezés $\lambda \mu$ -szöröséhez a harmadik -1 -szeresét adva az összegben ilyen tag nem fog szerepelni. Az összeghez az első kifejezés $(1 - \lambda \mu)$ -szörösét adva $\mathbf{p}^2$ sem fog szerepelni az összegben. Tehát az $\alpha = 1 - \lambda \mu$, $\gamma = \lambda \mu$, $\eta = -1$ választással a $\mathbf{p}^2$ -es és a $\mathbf{b} \mathbf{d}$ -s tagok kiesnek, továbbá a $-\mathbf{b} \mathbf{p}$ és a $-\mathbf{d} \mathbf{p}$ együtthatója (2) bal oldalán

$$(1 - \lambda \mu) \frac{\mu}{\mu - 1} + \lambda \mu - (1 - \lambda) \frac{\mu}{\mu - 1} = \frac{\mu}{\mu - 1} (1 - \lambda \mu + \lambda(\mu - 1) - 1 + \lambda) = 0;$$

illetőleg

$$(1 - \lambda \mu) \frac{\lambda}{\lambda - 1} + \lambda \mu - (1 - \mu) \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} (1 - \lambda \mu + \mu(\lambda - 1) - 1 + \mu) = 0.$$

K_{AC} szorzója, $\alpha = 0$ lehetne, ha $\lambda \mu = 1$ volna, de ez sem lehetséges. Ha ugyanis ez állna fenn, akkor $\mathbf{c}$ (1)-beli előállításában a második törtet λ -val egyszerűsítve azt kapnánk, hogy

$$\mathbf{c} = \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{b} + \frac{1}{1 - \mu} \mathbf{d} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{d} = \mu \mathbf{b} + (1 - \mu) \mathbf{c}.$$

Ez azt jelentené, hogy D egybeesnék E -vel, és így egy egyenesen lenne B -vel és C -vel a feladat feltételével ellentétben. Ezzel a feladat állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladatot vektorszámítással megoldó versenyzők többnyire azt számolták ki, hogy ha egy P pontra két egyenlet teljesül, akkor a harmadik is. Ekkor vagy három esetet kell külön-külön végigszámolni, vagy az igényel külön magyarázatot, hogy miért szimmetrikus a három kör szerepe.

2. A feladat megoldható projektív geometriai ismeretek alapján is⁴. Egy ilyen megoldásnak csak röviden vázoljuk a menetét. Ha R , S , T , U egy egyenes négy különböző pontja, akkor az RT/TS arányt, ezt pozitívnak tekintve, ha a két

³Vektorokra vonatkozóan lásd pl. Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J.: *Matematikai Versenyfeladatok* II. rész (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988) 37–47. old.; különösen e) pont, 43–44. old.

⁴A bizonyítás nélkül felhasználandó ismeretekre vonatkozóan Hajós Gy. *Bevezetés a geometriába* c. könyvére fogunk utalni (Tankönyvkiadó, Budapest, 1960). A projektív geometria egy minimális feltételekre alapozott (a távolság, szög, folytonosság fogalmát nem használó) felépítésére vonatkozóan lásd pl. a következő művet: H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*, Gondolat, Budapest, 1986.

szakasz egyirányú, negatívnak, ha ellentétes irányú, a három pont osztóviszonyának nevezzük, és (RST) -vel jelöljük. Az $(RST)/(RSU)$ arány a négy pont kettősvisszonya, jelölése $(RSTU)$. Ez akkor negatív, ha az R, S és a T, U pontpár elválasztja egymást.

Ha a kettősvisszony értéke -1 , akkor azt mondjuk, hogy a négy pont harmonikus pontnégyes, illetőleg R, S és T, U harmonikusan választja el egymást⁵.

A feladat betűzését használva jelöljük a BD és EF , EF és AC , illetőleg AC és BD metszéspontját rendre X, Y, Z -vel, ha létrejönnek (5. ábra). Ekkor A, C és Z, Y , továbbá D, B és X, Z , végül E, F és Y, X harmonikusan választja el egymást. Ha például $BEFD$ trapéz, akkor C felezi a rajta át a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső szakaszát, és így AC felezi a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott minden egyenesnek az AB és AD közé eső szakaszát, tehát BD -t és EF -et is⁶ (6. ábra). Ezekből következik, hogy pl. az AC átmérőjű körben $AZ/AY = CZ/CY$, s így a kör az ehhez az arányhoz tartozó Apollóniosz-kör⁷.

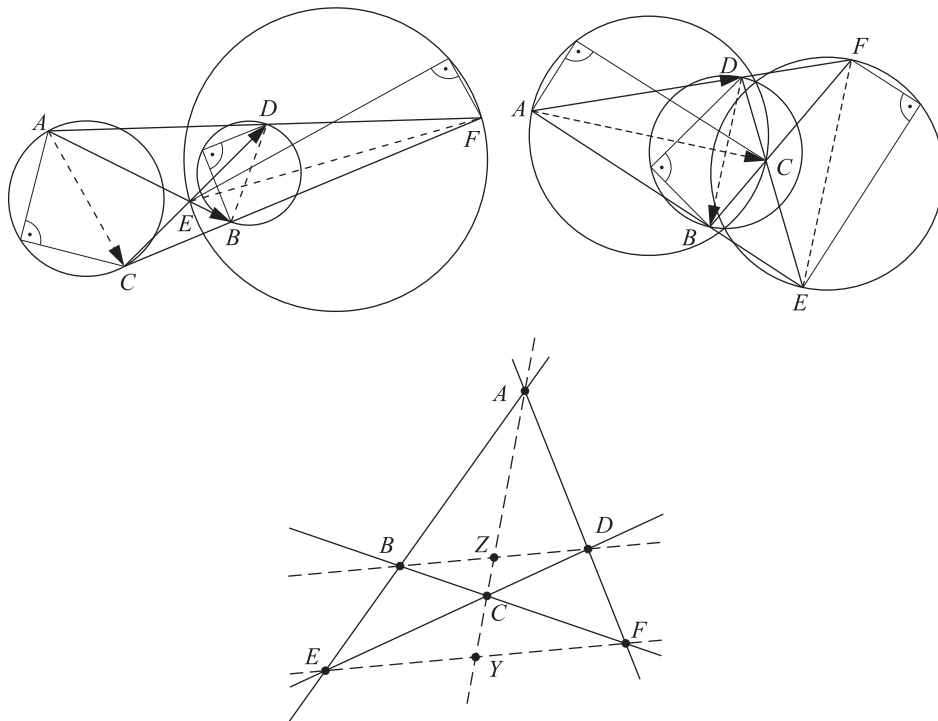
Ezután az XYZ háromszög oldalait a C, D, E pontokban metsző egyenesre Menelaos tételét alkalmazzuk⁸. Eszerint, a háromszög oldalegyeneseit a háromszög valamelyik irányú körbejárása szerint irányítva

$$(YZC)(ZXD)(XYE) = -1.$$

Ebből az adódik, hogy ha két kör metszi egymást, akkor a rájuk vonatkozó távolságarányok szorzata a harmadik körre vonatkozó arányt adja, vagyis a metszésponton a harmadik kör is átmegy.

Ha pl. EF és BD párhuzamos, akkor Y az EF felezőpontja, Z a BD szakaszé, és hasonló háromszögek felhasználásával fejezhető be az előzőhöz hasonlóan a bizonyítás.

3. A feladat állítását tartalmazza H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer *Az újra felfedezett geometria* címen megjelent könyvének 2.4.7 tétele⁹.



⁵Hajós idézett műve (a továbbiakban I. m.) 460. old.

⁶I. m. 462–463. old.

⁷I. m. 124. old.

⁸I. m. 357. old.

⁹Gondolat Kiadó, 1977., 70. old.

