

Előrebocsátunk egy megjegyzést. Elég olyan polinomokra szorítkozni, amelyekben minden változó legfeljebb első hatványon szerepel. Ha ugyanis minden páros hatványon szereplő változót 1-gyel, a páratlan hatványon szereplőket pedig a változó első hatványával helyettesítjük, ezzel a polinom foka nem növekszik, a feladatban megadott tulajdonsága pedig nyilvánvalóan megmarad, és ezen az sem változtat, ha a módosítás után összevonható tagokat összevonjuk. Ha pedig a módosított polinom legalább n -edfokú, akkor az eredeti is. A továbbiakban polinomon mindig a mondott módon egyszerűsített polinomot értünk².

I. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Egy egyváltozós polinom $ax + b$ alakú. Feltétel szerint

$$a + b > 0, \quad -a + b < 0, \quad \text{azaz} \quad a - b > 0,$$

tehát

$$2a > 0, \quad a > 0.$$

A polinom tehát elsőfokú. (Az eredeti polinom legalább elsőfokú.)

Tegyük fel, hogy a legfeljebb m változós polinomokra igaz a feladat állítása. Egy $m + 1$ változós polinom

$$f_1(x_1, \dots, x_m) + x_{m+1}f_2(x_1, \dots, x_m)$$

alakban írható, ahol f_1 és f_2 legfeljebb m -változós polinom. Legyen $c_1, \dots, c_m$ egy $+1$ -ekből és -1 -ekből álló sorozat. Ha a c_i -k közt páros számú -1 van, akkor x_{m+1} -nek egyszer $+1$, egyszer -1 értéket adva, a feltétel szerint

$$f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) > 0 \quad f_1(c_1, \dots, c_m) - f_2(c_1, \dots, c_m) < 0.$$

Az utóbbit így írhatjuk:

$$-f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) > 0 \quad \text{és így} \quad 2f_2(c_1, \dots, c_m) > 0;$$

ha pedig a c_i -k között a -1 -ek száma páratlan, akkor

$$f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) < 0, \quad f_1(c_1, \dots, c_m) - f_2(c_1, \dots, c_m) > 0,$$

tehát

$$-f_1(c_1, \dots, c_m) + f_2(c_1, \dots, c_m) < 0 \quad \text{és így} \quad 2f_2(c_1, \dots, c_m) < 0.$$

Azt kaptuk, hogy f_2 -nek is megvan a tételben megfogalmazott tulajdonsága, s így az indukciós feltétel szerint legalább m -edfokú, az eredeti polinom legalább $(m + 1)$ -edfokú. Ezzel beláttuk, hogy a tétel állítása minden n -re igaz.

II. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk a feladat állítását. Az, hogy egy polinom n -nél alacsonyabb fokú, azt jelenti, hogy nincs benne mindegyik változót tartalmazó tag. Tegyük fel, hogy egy ilyen polinomra teljesülnének a feladat feltételei. Képezzük az összes $+1$ -ekből és -1 -ekből álló sorozatokon vett értékeit a polinomnak, és a pozitív értékek U összegéből vonjuk le a negatív értékek V összegét. Nyilvánvalóan $U - V > 0$. Nézzük meg, hogy egy $ax_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j}$ tag együtthatója ($j < n$) hányszor szerepel U -ban és hányszor V -ben. A $+1$ -ekből és -1 -ekből álló $c_1, c_2, \dots, c_n$ sorozatokban, rögzítve $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_j}$ értékét, ha

$$c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_j} = 1,$$

akkor a annyszor szerepel U -ban, ahányféleképpen a többi c -k közt páros számú -1 fordulhat elő. Ez a szám

$$r = \binom{n-j}{0} + \binom{n-j}{2} + \binom{n-j}{4} + \dots,$$

ahol az összeg addig tart, amíg az alsó páros szám nem nagyobb $(n-j)$ -nél; V -ben pedig annyszor, ahányféleképpen a többi c -k közül páratlan számút lehet kiválasztani. Ez a szám pedig

$$s = \binom{n-j}{1} + \binom{n-j}{3} + \binom{n-j}{5} + \dots$$

A kiszemelt tag adaléka az $U - V$ különbséghez tehát a binomiális tétel szerint

$$a(r - s) = a \left\{ \binom{n-j}{0} - \binom{n-j}{1} + \binom{n-j}{2} - \binom{n-j}{3} + \dots \right\} = a(1 - 1)^{n-j} = 0.$$

Ha viszont

$$c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_j} = -1,$$

akkor $-a$ szerepel U -ban s -szer, V -ben pedig r -szer, így ekkor is 0 a tag adaléka az $U - V$ különbséghez. Mivel ez az indirekt feltevés szerint a polinom minden tagjára teljesülne, így ellentmondásra jutottunk azzal, hogy ez a különbség pozitív. A polinomban tehát szerepelnie kell az $x_1x_2\dots x_n$ tagnak nemnulla együtthatóval. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

²Elmondhatóak volnának megoldásaink nélkül az egyszerűsítés nélkül is, csak a szöveg válnék sokkal bonyolultabbá.