

A következő állítást fogjuk bizonyítani:

Ha az $L_1, L_2, \dots, L_m$ halmaz mindegyike a számegyenes legalább m (de véges számú) páronként közös elem nélküli intervallumból áll, akkor kiválasztható mindegyik halmazból egy-egy intervallum úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja.

Ez tartalmazza a feladat állítását. Ehhez csak $n = 2m - 1$ és $n = 2m$ esetén a $H_m, H_{m+1}, \dots, H_{2m-1}$ halmazokra kell alkalmazni a kimondott tételt.

Az állítás igaz, ha $m = 1$. Ha $m > 1$, eljárást adunk meg az intervallumok egymás utáni kiválasztására. Vegyük mindegyik halmaz balról első intervallumának a jobb végpontját és azt vagy azokat az intervallumokat, amelyekre ez a legkisebb. Több intervallum esetén válasszunk ki egy jobbról nyitottat, ha van ilyen, különben tetszés szerint egyet. Legyen ez I_1 , és tartozzék az L_i halmazhoz. Ezután hagyjuk el L_i -t, a többi halmazból pedig a balról első intervallumot, majd ismételjük az eljárást, amíg el nem fogynak a halmazok.

Az első lépés után $m - 1$ halmaz marad, mindegyik legalább $m - 1$ páronként közös pont nélküli intervallumból áll. Azt kell még belátnunk, hogy I_1 -nek a megmaradt intervallumok egyikével sincs közös pontja. Ezzel egyenértékű az, hogy ha I_1 -nek az eredeti L_j halmaz I' intervallumával van közös pontja, ahol $j \neq i$, akkor I' az L_j balról első intervalluma.

Jelöljük I' bal végpontját b -vel, és tegyük fel, hogy van L_j -ben egy I' -től balra levő I'' intervallum. Ha b kisebb I_1 jobb végpontjánál, akkor ez még inkább igaz I'' jobb végpontjára (8.a ábra; a halmazokat párhuzamosan eltolt egyeneseken szemléltetjük), így nem I_1 -et kellett volna kiválasztanunk.

Ha b egyenlő I_1 jobb végpontjával, akkor kell, hogy I' balról, I_1 jobbról zárt legyen. Ekkor I'' jobb végpontja vagy kisebb b -nél, vagy egyenlő vele, de az utóbbi esetben az intervallum nyitott, mert nincs közös pontja I' -vel (8.b ábra). Ismét egyik esetben sem I_1 -et kellett volna kiválasztani eljárásumk szerint. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ezek alapján az eljárást m -szer megismételve az összes követelményt kielégítő intervallumhalmazt kapunk.

Megjegyzés. Többen tettek kísérletet annak bizonyítására, hogy a feladat állításában az $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ korlát nem javítható, de ezek hibásak. Az $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ élességét csupán $n \leq 6$ -ra sikerült eddig belátni. Annyit azonban meg lehet mutatni, hogy van olyan halmazrendszer, amelyikből csak $\left(1 - \frac{1}{e}\right)(n+1)$ -nél kevesebb intervallum választható ki a feladat követelményeinek megfelelően.

Álljon $k = 1, 2, \dots, n$ -re H_k a

$$(0, 1/k), (1/k, 2/k), \dots, ((k-1)/k, 1)$$

nyitott intervallumokból. Legyen a kívánalmaknak megfelelően kiválasztható intervallumok maximális száma j . A kiválasztott intervallumok hosszának az összege nem lehet 1-nél nagyobb. Ha minden lépésben kiválaszthatunk egyet a megmaradt legrövidebb intervallumok közül, ez az összeg akkor is legalább

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-j+1} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{1-1/n} + \frac{1}{1-2/n} + \dots + \frac{1}{1-(j-1)/n} \right). \end{aligned}$$

Integrálva $\frac{1}{1-x}$ -et $-\frac{1}{n}$ -től $\frac{j-1}{n}$ -ig, S tekinthető az integrál egy felső közelítő összegének (9. ábra), s így az integrálnak 1-nél kisebbnek kell lennie, azaz

$$\log \left(\frac{n+1}{n-j+1} \right) < 1, \quad j < \left(1 - \frac{1}{e} \right) (n+1).$$

Ez tehát felső korlát a kiválasztható intervallumok számára. A nyert konstans:

$$1 - \frac{1}{e} = 0,63212 \dots$$

A megjegyzés Surányi Lászlótól származik.



