

I. megoldás. Tekintsünk egy $ABCD$ paralelogrammát, amelyikben AB és BC hossza a , illetőleg λa ($\lambda > 1$), az átlók metszéspontja és a BC oldal felezőpontja E , illetőleg F . Ekkor E egyben az átlók közös felezőpontja is, így EF az AB -vel párhuzamos középvonal fele, hossza $\frac{1}{2}a$. A szöbe jövő E pontok tehát az F középpontú, $\frac{1}{2}a$ sugarú k_E kör pontjai, kivéve a BC egyenessel való két metszéspontot, amelyek a kör átellenes pontjai. Szimmetria okokból elég a BC egyenes egyik oldalán levő félkört vizsgálni (1. ábra).

A kör átmérője a BC szakasz része. Az átlók szöge a BC szakasz látószöge E -ből, tehát tompaszög (hiszen az átmérő látószöge derékszög). Ennek az α szögnek a lehető legkisebb értékét kell tehát meghatároznunk.

Belátjuk, hogy α értéke a félkör E_0 felezőpontjára a legkisebb. A BCE_0 háromszög köré írt k_0 kört belülről érinti k_E , mert mindkét kör középpontja a BC -re F -ben emelt merőlegesen van, és k_E átmérője a BC szakasz része. A DE és k_0 metszéspontját G -vel jelölve

$$CEB\angle = CGB\angle + GCE\angle > CGB\angle = CE_0B\angle,$$

amint állítottuk.

A keresett legnagyobb hegyesszög, φ_0 ennek a szögnek mellékszöge, és mivel a BCE_0 háromszög egyenlő szárú, az $E_0BF\angle$ kétszeresével egyenlő, tehát például így fejezhető ki λ -val a BE_0F derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} = \frac{BF}{E_0F} = \frac{\frac{1}{2}\lambda a}{\frac{1}{2}a} = \lambda, \quad \text{azaz} \quad \varphi_0 = 2\arccot \lambda,$$

ahol az arkusz-függvény 0° és 90° közé eső értékét kell venni.

Megjegyzés. A feladat szövege feltételezte ugyan, de meggondolásaink során bizonyítást is nyert, hogy ezt a maximális értéket fel is veszi az átlók szöge, és azt is beláttuk, hogy a téglalapban a legnagyobb ez a szög.

II. megoldás. Válasszuk mértékegységnek az AB oldal hosszát, ekkor BC hossza λ . Jelöljük az átlók metszéspontját (ami közös felezőpontjuk is) E -vel, AE és EB hosszát e -vel, illetőleg f -vel, a köztük levő szöget φ -vel (2. ábra).

A koszinusztételt alkalmazzuk az AEB és a BEC háromszögre.

$$1 = e^2 + f^2 - 2ef \cos \varphi, \quad \lambda^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos(180^\circ - \varphi) = e^2 + f^2 + 2ef \cos \varphi.$$

A megfelelő oldalak összegét és különbségét képezve

$$\lambda^2 + 1 = 2(e^2 + f^2), \quad \lambda^2 - 1 = 4ef \cos \varphi.$$

A második egyenlőség bal oldala pozitív, így $\cos \varphi$ pozitív, φ tehát hegyesszög.

Alkalmazzuk a második egyenlőségben e^2 -re és f^2 -re a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget, és használjuk fel az első egyenlőtlenséget:

$$\lambda^2 - 1 \leq 4 \left(\frac{e^2 + f^2}{2} \right) \cos \varphi = (\lambda^2 + 1) \cos \varphi.$$

Innen

$$\cos \varphi \geq \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1},$$

és akkor áll fenn egyenlőség, ha $e = f$, azaz ha a paralelogramma téglalap. Mivel a koszinusz-függvény a $(0^\circ; 90^\circ)$ számközben a változó csökkenő függvénye, így a keresett legnagyobb φ_0 szögre

$$\cos \varphi_0 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1},$$

ahol a függvény 0° és 90° közé eső értékét kell venni.

Megjegyzés. A

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2)} = \frac{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2) - 1}{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2) + 1}$$

azonosság alapján világos, hogy az eredmény megegyezik az előző megoldásban nyerttel.

III. megoldás. Az AC átlót rögzítve azok a D pontok, amelyekre az AD/CD arány egy rögzített (1-nél nagyobb) λ érték, egy kört alkotnak, az AC szakaszhoz és λ arányhoz tartozó Apolloniosz-kört. Jelöljük ezt k_λ -val, AC felezőpontját E -vel, k_λ középpontját O -val.

Az AC és ED átlók közti szög akkor a legnagyobb, ha D az E pontból a k körhöz húzott érintő D_0 érintési pontja. Jelöljük ezt a legnagyobb szöget φ_0 -val, k_λ -nak az AC -re eső átellenes pontjait P -vel és Q -val, az AC szakasz felét e -vel (3. ábra). P és Q ezt a szakaszt belülről, illetőleg kívülről $\lambda : 1$ arányban osztó pont, így

$$\lambda = \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QC}.$$

A szereplő szakaszokat e -vel fejezve ki a két törtben

$$(1) \quad \lambda = \frac{e + EP}{e - EP} = \frac{EQ + e}{EQ - e}.$$

A második egyenlőségéből a törtek eltávolítása és rendezés után az

$$(2) \quad e^2 = EP \cdot EQ$$

egyenlőséget kapjuk. (1)-ből

$$EP = \frac{(\lambda - 1)e}{\lambda + 1}, \quad EQ = \frac{(\lambda + 1)e}{\lambda - 1}.$$

A (2) egyenlőség jobb oldalán álló szorzat az E pontnak a k_λ körre vonatkozó hatványa, így az egyenlőség azt jelenti, hogy az E pontból a k_λ körhöz húzott érintő hossza $ED_0 = e$. A φ_0 szög meghatározásakor az OED_0 háromszög OD_0 oldalát, vagyis a k_λ kör r sugarát fejezzük ki e -vel és λ -val.

$$r = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}(EQ - EP) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) e = \frac{2\lambda e}{\lambda^2 - 1}.$$

Az EOD_0 derékszögű háromszögből tehát

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{r}{e} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1},$$

ahol a 0° és 90° közé eső értékeket kell venni.

Megjegyzések. 1. Az előző megoldásokkal való kapcsolat könnyen adódik például a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

összefüggésből.

2. Az $ED_0 = e$ egyenlőség szerint D_0 az AC átmérőjű körön van, így az ACD_0 háromszög derékszögű, vagyis az a paralelogramma, amelyikre az átlók szöge a legnagyobb, a téglalap.



