

I. megoldás. Az ALM háromszög egyenlő szárú. Így, ha AB és AC különböző, akkor a B -ből és a C -ből LM -mel párhuzamosan húzott egyenes is különböző. A velük nem párhuzamos KM egyenes metszi őket, így a D és E pont létrejön (1. ábra).

Jelöljük BD és AC metszéspontját B' -vel, CE és AB metszéspontját C' -vel. Ekkor egyenlőszárú az ALM -hez hasonló $AB'B$ és az ACC' háromszög is. B' -n és C' -n át párhuzamosot húzunk a BC oldallal. Az előbbi és KL metszéspontját G -vel, az utóbbi és KM metszéspontját H -val jelölve a BDK és a $B'DG$ háromszög egybevágó, mert megfelelő szögeik csúcshökök vagy váltóshökök. Belátjuk továbbá, hogy $B'G = BK$. Ugyanis a $GB'L$ és KCL háromszög hasonló, és az utóbbi két oldala a C -ből a beírt körhöz húzott két érintőszakasz, ezért $B'G = B'L$. Utóbbi és BM viszont egyenlő szakaszok különbsége, így szintén egyenlők. Végül BM és BK a B -ből húzott két érintőszakasz, így egyenlők. Ekkor azonban a többi oldalpár is egyenlő, így $BD = B'D$, vagyis D a BB' szakasz felezőpontja.

Ugyanígy látjuk be, hogy E a CC' szakasz felezőpontja. A CKE és a $C'HE$ háromszög egybevágó, miután megfelelő szögeik csúcshökök vagy váltóshökök, továbbá egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlő volta következtében a KBM háromszöghöz hasonló $HC'M$ háromszög egyenlő szárú, s így $HC' = C'M = CL = CK$. Ekkor a háromszög többi oldalpárja is egyenlő, így $CE = C'E$.

Ezekből már következik, hogy a DE egyenes a BAC szögei közötti harmadik párhuzamos szakaszt, KM -et is felezi, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzések. 1. Világos, hogy ez az egyenes az A csúcsból induló szögfelező.

2. Mint többen is megjegyezték, a bizonyításban csak az AB és AC oldal különböző voltára volt szükség.

3. Könnyen látható, akár ennek, akár a következő megoldásoknak a gondolatmenetével, hogy helyes marad az állítás akkor is, ha a beírt kört a háromszög egyik oldalát kívülről érintő körrel helyettesítjük. Az AB vagy az AC oldalhoz hozzáírt kör esetén D és E a külső szögfelezőn lesz.

A versenyzők sok különböző megoldást adtak a feladatra. Sokan használták fel Menelaos tételét, illetőleg annak a megfordítását. Volt, aki koordinátákkal számolt. A fenti megoldás mindegyiknél sokkal egyszerűbb. Miután azonban ez a megoldás csak egyetlen versenyzőnél szerepelt, bemutatunk még két további megoldást.

II. megoldás. Válasszuk a jelölést úgy, hogy $AB < AC$ teljesüljön. Ekkor D a KL szakaszon van, E az MK szakasz K -n túli meghosszabításán. Jelöljük a háromszögbe írt kört k -val.

Azt mutatjuk meg, hogy D és E az LM szakasz felező merőlegesen van, vagyis hogy DLM és az ELM háromszög egyenlő szárú, mivel L -nél és M -nél levő szögeik egyenlők (2. ábra).

Az AML , BKM és CLK háromszög egyenlő szárú, mert két-két oldaluk a csúcsokból k -hoz húzott érintőszakasz. Az alapon levő szögeiket jelöljük α , β , illetőleg γ -val. Ezek egyenlők a KLM háromszög K -nál, L -nél, illetőleg M -nél levő szögével, mert k -nak ugyanazt az ívét tartalmazó húr-érintő szögek, illetőleg kerületi szögek. Így összegük 180° .

B , K , D és M egy k_1 körön van, mert az LKM , LMA , és DBM egyenlő és egyező irányítású. Az első és a második azért, mert az első kerületi szög, a második húr-érintő szög k -ban, és az első szárúktól a másodikig a kör ugyanazon irányított íve fut; a második és a harmadik szög szárai pedig egyirányban párhuzamosak. Így a két szög csúcsa és a megfelelő szárai egyenesének a metszéspontja egy körön van.

Ekkor $BMD = CKL = \gamma$, mert a száregyenesek közötti (csúcs-) szögtartomány egyaránt k_1 B -től K -n át D -ig futó ívét tartalmazza. Ennek folytán

$$LMD = 180^\circ - BMD - LMA = 180^\circ - \gamma - \alpha = \beta = MLD,$$

tehát LDM egyenlő szárú háromszög.

Hasonlóan C , K , E és L is egy k_2 körön van, mert LKM , ALM és ACE egyenlő és egyező irányítású ugyanolyan okokból, mint az előbb.

Ekkor $ELC = EKC = MKB = \beta$, mert az első és a második k_2 ugyanazon ívét tartalmazó kerületi szög k_2 -ben, a második és a harmadik pedig csúcshökök-pár. Így

$$MLE = 180^\circ - ALM - ELC = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma = EML,$$

tehát az ELM háromszög is egyenlő szárú. Eszerint az LM szakasz felező merőlegese átmegy D -n is, E -n is, vagyis D , E és LM felezőpontja egy egyenesen van a feladat állításának megfelelően.

Megjegyzés. Miután beláttuk, hogy B , K , D és M , továbbá C , K , E és L egy körön van, befejezhetjük a bizonyítást így is: A BD -re D -ben, a BK -ra K -ban és a BM -re M -ben emelt merőleges egy ponton megy át, a k_1 kör B -vel átellenes pontján. Ez a pont azonban a háromszögbe írt kör O középpontja, mert a K -ban és az M -ben emelt merőleges ennek a körnek a sugara (3. ábra).

Hasonlóan a CE -re E -ben, a CK -ra K -ban és a CL -re L -ben emelt merőleges a k_2 kör C -vel szemben fekvő pontján megy keresztül, ami ismét O . Az LM húr F felezőpontjában emelt merőleges ugyancsak átmegy O -n. Mivel BD és CE párhuzamos LM -mel, így D , E és F egy egyenesen van.

III. megoldás. Feltesszük, hogy $AB < AC$. Jelöljük a CE és AB egyenes metszéspontját C' -vel, DE és LM metszéspontját F -fel, BD és MK metszéspontját G -vel (4. ábra). Azt kell megmutatnunk, hogy F az LM szakasz felezőpontja.

Menelaos tételét használjuk fel. A DE egyenes nem megy át a KLM háromszög egyik csúcsán sem, így az említett tétel szerint

$$\frac{ME \cdot KD \cdot LF}{EK \cdot DL \cdot FM} = -1.$$

Itt, tetszés szerint rögzítve az egyes egyeneseken egy irányítást, a szakaszok előjelesen értendők. Azt mutatjuk meg, hogy

$$(1) \quad \frac{ME \cdot KD}{EK \cdot DL} = -1.$$

DG és ML párhuzamos, így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{KD}{DL} = \frac{KG}{GM},$$

így (1) bal oldala helyett

$$(2) \quad \frac{ME \cdot KG}{EK \cdot GM}$$

írható. GB és EC' párhuzamos, tehát az EMC' szög száraitra alkalmazva a párhuzamos szelők tételét

$$\frac{ME}{GM} = \frac{MC'}{BM}.$$

A CKE és a BKG háromszög hasonló, mert megfelelő szögeik egyenlők. Miután az A -ból, a B -ből és a C -ből az ABC háromszögbe írt körhöz húzott érintők egyenlők, továbbá $MC' = LC$, mert egyenlő szakaszok különbségei, így

$$\frac{KG}{EK} = \frac{KB}{CK} = \frac{MB}{LC} = \frac{MB}{MC'}.$$

Az előjel is helyes, mert az első arányban és az utolsóban is egyirányú szakaszok szerepelnek. Mindezek alapján

$$\frac{ME \cdot KD}{EK \cdot DL} = \frac{ME \cdot KG}{EK \cdot GM} = \frac{MC' \cdot MB}{BM \cdot MC'} = -1,$$

amit állítottunk.