Az idézett feladat megoldásának eredménye szerint

$$\mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{tg}\beta + \mathrm{ctg}2\beta.$$

A kétszeres szögre vonatkozó összefüggések szerint átalakítva:

$$\mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{tg}\beta + \frac{1-\mathrm{tg}^2\beta}{2\mathrm{tg}\beta} = \frac{1+3\mathrm{tg}^2\beta}{2\mathrm{tg}\beta}. \tag{1}$$

A továbbiakban szükségünk lesz a következő szögfüggvényekre is:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4\mathrm{tg}^2\beta}{1+10\mathrm{tg}^2\beta+9\mathrm{tg}^4\beta}.$$

A nevezőt szorzattá alakítjuk:

$$\cos^2\alpha = \frac{4\mathrm{tg}^2\beta}{(1+\mathrm{tg}^2\beta)(1+9\mathrm{tg}^2\beta)}. \tag{2}$$

(1) szerint bármely lejtőhöz található hajítási szög, mert β pozitív hegyesszög. A tetőzés mértani helyét rögtön megadhatjuk, hiszen a tetőpontban a sebesség zérus, így az energiamegmaradás elve szerint a kezdeti mgF $\left(F=\frac{c^2}{2g}\right)$ mozgási energia minden hajításnál azonos lévén, a tetőzések az $y=F$ egyenesen vannak.

A becsapódás abszcisszájára az idézett feladat megoldása szerint

$$x = 4F\cos^2\alpha(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta) = 4F\frac{4\mathrm{tg}^2\beta}{(1+\mathrm{tg}^2\beta)(1+9\mathrm{tg}^2\beta)}\cdot\frac{1+\mathrm{tg}^2\beta}{2\mathrm{tg}\beta} = 8F\frac{\mathrm{tg}\beta}{1+9\mathrm{tg}^2\beta}.$$

Mivel a lejtő egyenlete $\mathrm{tg}\beta = y/x$, ezt behelyettesítve:

$$x = 8F\frac{\frac{y}{x}}{1+9\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

A törteket eltávolítva

$$x^2+9y^2 = 8Fy.$$

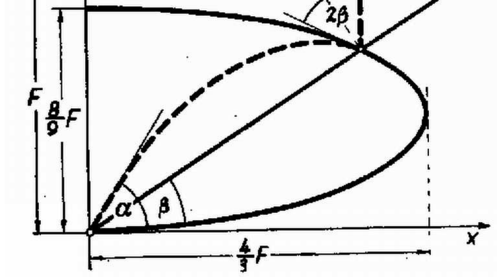
Teljes négyzetté alakítva

$$x^2 + 9\left(y-\frac{4}{9}F\right)^2 = 9\left(\frac{4}{9}F\right)^2,$$

amely egy ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}F\right)^2} + \frac{\left(y-\frac{4}{9}F\right)^2}{\left(\frac{4}{9}F\right)^2} = 1,$$

A becsapódási pontok mértani helye ezen ellipszisnek az ábrán látható fele.



Vesztergombi György (Bp., Piarista g. III. o. t.) *dolgozata alapján.*