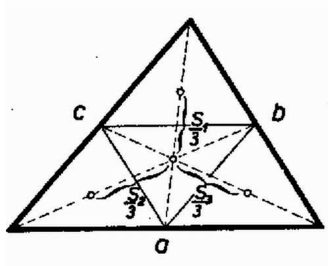
I. megoldás: Húzzuk meg a háromszög középvonalait, ezek négy darab hozzá hasonló, egybevágó háromszögre bontják.



Így a háromszög tömegét M-mel jelölve, a kis háromszögek tömege $M/4$, és súlypontjaik távolsága a nagy háromszög súlypontjától: 0, $s_1/3$, $s_2/3$, $s_3/3$. Alkalmazva a XXII. kötet 1. és 2. számában megjelent cikk tételeit:

$$Ma_x^2a^2=\frac{M}{4}a_x^2\Big(\frac{a}{2}\Big)^2+\left[\frac{M}{4}a_x^2\Big(\frac{a}{2}\Big)^2+\frac{M}{4}\Big(\frac{s_1}{3}\Big)^2\right]+\left[\frac{M}{4}a_x^2\Big(\frac{a}{2}\Big)^2+\frac{M}{4}\Big(\frac{s_2}{3}\Big)^2\right]+\left[\frac{M}{4}a_x^2\Big(\frac{a}{2}\Big)^2+\frac{M}{4}\Big(\frac{s_3}{3}\Big)^2\right]$$

innen M-mel egyszerűsítve, összevonva és rendezve:

$$a_x^2=\frac{s_1^2+s_2^2+s_3^2}{27\;a^2}.$$

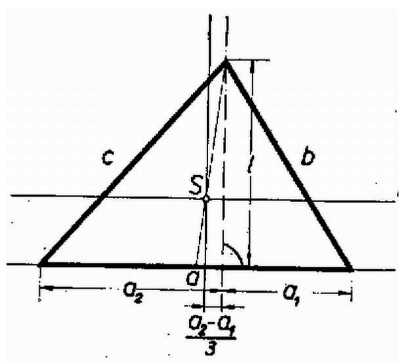
Fejezzük ki a súlyvonalakat az oldalak segítségével! Ismeretes, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével. Alkalmazzuk ezt a nagy háromszögnek oldalfelező pontjaira való tükrözésével nyert paralelogrammákra:

$$4s_1^2+a^2=2(b^2+c^2),\quad 4s_2^2+b^2=2(a^2+c^2),\quad 4s_2^2+c^2=2(a^2+b^2).$$

Ezen egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy $s_1^2+s_2^2+s_3^2=3/4(a^2+b^2+c^2)$. Tehát a tehetetlenségi nyomaték: $\Theta=Ma_x^2\cdot a^2=M/36(a^2+b^2+c^2)$.

Vesztergombi György (Bp., Piarista g. III. o. t.)

II. megoldás: A keresett tehetetlenségi nyomaték egyenlő a háromszög súlypontján átmenő és az egyik oldallal párhuzamos, valamint a súlyponton átmenő, erre merőleges tengelyekre vonatkozó Θ_1, Θ_2 tehetetlenségi nyomatékok összegével. Az előbbi egyenlő egy l hosszúságú, M tömegű lineárisan növekvő sűrűségű egyenes vonaldarab tehetetlenségi nyomatékával, hiszen a háromszög pontjait eltolhatjuk a tengellyel párhuzamosan.



Tehát $\Theta_1=1/18\;Ml^2$. A második nyomaték meghatározásához előbb kiszámítjuk a háromszög tehetetlenségi nyomatékát az illető tengellyel párhuzamos, harmadik csúcsponton átmenő tengelyre vonatkozólag. A háromszög pontjait ezen tengellyel párhuzamosan eltolva két lineárisan növekvő sűrűségű rudat kapunk; ezek tehetetlenségi nyomatékát kell meghatároznunk a végpontjukon átmenő tengelyre vonatkozólag. A Steiner–tétel segítségével e két nyomaték összege: $\big[1/18M_1a_1^2+M_1(a_1/3)^2\big]+\big[1/18M_2a_2^2+M_2(a_2/3)^2\big]=1/6(M_1a_1^2+M_2a_2^2)=$ $1/6(Ma_1/a{\cdot}a_1^2+Ma_2/a{\cdot}a_2^2)=1/6M/a(a_1^3+a_2^3)=M/6(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)$. Így a súlyponton átmenő tengelyre vonatkozólag a háromszög tehetetlenségi nyomatéka ugyancsak a Steiner–tétel alapján $\Theta_2=M/6(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)-M\left(\dfrac{a_2-a_1}{3}\right)^2$. Felhasználva, hogy $l^2=b^2-a_1^2$, $l^2=c^2-a_2^2$, a súlyponton átmenő, a háromszög síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott nyomaték:

$$\begin{aligned}\Theta=\Theta_1+\Theta_2&=1/18Ml^2+1/6M(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)-1/9M(a_1^2-2a_1a_2+a_2^2)=\\&=M/36(2l^2+6a_1^2-6a_1a_2+6a_2^2-4a_1^2+8a_1a_2-4a_2^2)=\\&=M/36(b^2-a_1^2+c^2-a_2^2+2a_1^2+2a_2^2+2a_1a_2)=\\&=M/36\big[b^2+c^2(a_1+a_2)^2\big]=M/36(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Szidarovszky Ágnes (Bp., Ságvári E. g. III. o.t.)