

I. megoldás: A feladatban szereplő deformációt egyértelműen ki lehet számítani, aszerint kell azonban levonni, vagy hozzáadni az eredeti hosszhoz (összenyomás, vagy megnyúlás), hogy a hatóerő támadáspontja a gyorsulás irányában nézve megelőzi-e a rugó pontjait, vagy követi-e azokat. Számítsuk ki a deformáció abszolút értékét! A rugó minden pontjára más és más deformáló erő hat. Az egyik végénél (a gyorsító erő támadáspontjánál) $P = Ma$ a deformációt okozó erő, a másik végénél 0. Ebből következik, hogy az eredeti rugón felvett egyenlő kis szakaszok különböző mértékben deformálódnak a gyorsulás alkalmával. A teljes deformációt kiszámíthatjuk oly módon, hogy a rugót hossza mentén beosztjuk képzeletben kis szakaszokra – amelyeken belül közelítőleg állandónak tételezhetjük fel a ható erőt –, majd ezen kis szakaszok „elemi” megnyúlásait összegezzük.

Osszuk fel a rugót n egyenlő részre. Egy-egy ilyen szakasz hossza l_0/n , tömege M/n , irányítás ereje $k \cdot n$, hiszen n -szer kisebb rugószakaszt n -szer nagyobb erővel kell ugyanakkorára megnyújtani (egységnyire). Jelöljük a P erő támadáspontjával ellentétes rugóvéget O -val, majd innen az egyes osztópontokat $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ és n -nel.

O mögött (húzás esetén) nincs rugó, az $1, 2, 3, \dots, n$. mögötti rugórész tömege $1 \cdot M/n, 2 \cdot M/n, 3 \cdot M/n, \dots, n \cdot M/n$, tehát ha a rugó minden pontja a gyorsulással mozog, akkor a $0, 1, 2, 3, \dots, n$. pontban ható erők rendre $0, 1 \cdot Ma/n, 2 \cdot Ma/n, 3 \cdot Ma/n, \dots, n \cdot Ma/n$. Az $\overline{O1}$ szakasz bármely belső pontjában 0 -nál nagyobb, $1 \cdot Ma/n$ -nél kisebb erő hat, az $\overline{12}$ szakasz belső pontjaiban $1 \cdot Ma/n$ -nél nagyobb, $2 \cdot Ma/n$ -nél kisebb, a $\overline{23}$ szakasz belső pontjaiban $2 \cdot Ma/n$ -nél nagyobb, $3 \cdot Ma/n$ -nél kisebb stb. erő hat. Egy-egy rugószakasz bármely, a végpontoktól különböző pontjában nagyobb erő hat, mint a szakasz O felőli végpontjában, de ez az erő kisebb, mint az n . felőli végpontjában fellépő erő. Most kiszámítjuk, mekkora lenne a rugó teljes megnyúlása, ha annak minden szakasza minden pontjában akkora erő működne, mint az illető szakasz O felőli végpontjánál. Ekkor – az osztópontoktól eltekintve – mindenütt kisebb erőt veszünk, mint a valóságos feszítőerő, tehát a ténylegesnél kisebb λ' megnyúlást kapunk. Majd kiszámítjuk a megnyúlást úgy is, mintha minden szakasz minden pontjában akkora erő hatna, mint az illető szakasz n . felőli végpontjában. Ekkor a ténylegesnél nagyobb erővel számolunk, tehát a ténylegesnél nagyobb λ'' megnyúlást kapunk. Ekkor írható: $\lambda' < \lambda < \lambda''$, amivel λ -ra két korlátot (alsó és felső) kapunk, (amelyek mindig közrefogják λ -t!). Ha most a beosztást egyre finomítjuk, azaz az osztópontok számát minden határon túl növeljük ($n \rightarrow \infty$), egyre inkább igaz lesz, hogy a kis szakaszok belső pontjaiban akkora erő működik, mint a végpontban számított erő. (Pontosabban: az elhanyagolás egyre kisebbedik.) Számítsuk ki a λ' és λ'' -t!

Az alsó korlát kiszámításánál látjuk, hogy az $1, 2, 3, \dots, n$. szakaszt $0, Ma/n, 2Ma/n, 3Ma/n, \dots, (n-1) \cdot Ma/n$ erő feszíti. Az egyes megnyúlások tehát

$$\lambda'_i = \frac{P_i}{n \cdot k} \quad \text{alapján} \quad \lambda'_i = \frac{(i-1) \cdot \frac{Ma}{n}}{n \cdot k}.$$

Ezek összege adja meg a teljes megnyúlást:

$$\lambda' = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1) \frac{Ma}{n}}{n \cdot k} \equiv \frac{a \frac{M}{n}}{nk} + \frac{a \frac{2M}{n}}{nk} + \frac{a \frac{3M}{n}}{n \cdot k} + \dots + \frac{a \frac{(n-1)M}{n}}{nk}.$$

Vagy a számtani sorozat összegképletének felhasználásával:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{aM(1+2+3+\dots+n-1)}{n^2k} = \frac{aM}{n^2k} \cdot \frac{1+n-1}{2}(n-1) = \\ &= \frac{Ma}{2k} \cdot \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen kapjuk λ'' -re:

$$\lambda'' = \sum_{i=1}^n \frac{i \frac{Ma}{n}}{n \cdot k} \quad \text{és} \quad \lambda'' = \frac{Ma}{2k} \frac{n+1}{n}.$$

Most már $\lambda' < \lambda < \lambda''$ alapján felírhatjuk:

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{Ma}{2k} < \lambda < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{Ma}{2k},$$

vagy másképpen:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{Ma}{2k} < \lambda < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{Ma}{2k}.$$

Ha n értékét minden határon túl növeljük, az „alsó közelítő összeg” egyre növekszik, a „felső közelítő összeg” pedig egyre csökken, azaz egyre inkább megközelítik egymást, és mivel a valódi megnyúlás mindig e két érték között van, egyre inkább megközelítik a valódi megnyúlás értékét! Mivel a bal oldalon és a jobb oldalon szereplő sorozatnak a határértéke (leolvashatóan) egybeesik, ez nem lehet más, mint λ . Így λ -ra, a valódi megnyúlásra kapjuk $n \rightarrow \infty$ esetén (mivel ekkor $1/n \rightarrow 0$), hogy

$$\lambda = \frac{Ma}{2k}. \quad \text{Így a rugó hossza: } l = l_0 \pm \frac{Ma}{2k}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$l = 80 \text{ cm} \pm \frac{50 \text{ g} \cdot 100 \text{ cm sec}^{-2}}{2 \cdot 0,2 \text{ pond} \cdot \text{cm}^{-1}} = 80 \text{ cm} \pm \frac{5000}{2 \cdot 0,2 \cdot 981} \text{ cm, azaz}$$

$$l = 92,74 \text{ cm vagy}$$

$$l = 67,3 \text{ cm.}$$

Megjegyzés. Érdekes megfigyelni, hogy az így kapott megnyúlás feleakkora, mintha a rugó másik végét fallal támasztanánk meg (sztatikusan). A külső megtámasztás nélküli dinamikus esetben a feleakkora megnyúlást nem az okozza, hogy feleannyi a rá ható külső erő, hanem az erőhatás rugómenti lineáris csökkenése.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

II. megoldás: Az a gyorsulással mozgó rendszer helyettesíthető egy olyan gravitációs erőterrel, amelynél g helyett a -t írunk. Ha a rugót gravitációs erőterbe helyezük, saját súlya alatt összenyomódik, mégpedig oly módon, hogy az alsó menetek sűrűbben helyezkednek el, mint a felsők, mert a meneteket terhelő súly felülről lefelé nő. Az 1 menetre eső terhelés a rugó mentén lineárisan változik Ma és 0 között, középvértéke $Ma/2$. Ezzel az értékkel számolva:

$$\lambda = \frac{Ma}{1k}. \text{ A megváltozott hossz: } l = l_0 \pm \frac{Ma}{2k}.$$

Számértékekkel:

$$l = 92,7 \text{ cm, vagy } 67,3 \text{ cm.}$$

Pósch Margit (Bp., Veres Pálné g. IV. o. t.)