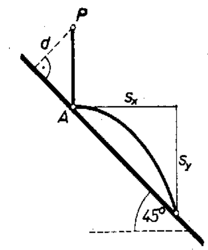
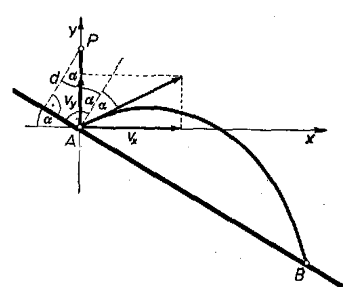
I. megoldás: A lejtő eléréséig a golyó $s=\mathrm{d}\sqrt{2}$ úton szabadon esik. A-ban sebessége $v=\sqrt{2gs}=\sqrt{2gd\sqrt{2}}$. Mivel az ütközés rugalmas, és 45°-os beesés alatt történik, a golyó ugyanezen v nagyságú, de vízszintes irányú sebességgel hagyja el A-t. Ekkor már a vízszintes hajítás pályáján mozog, így elmozdulásának vízszintes összetevője $s_x=vt$, a függőleges összetevő pedig $s_y=\frac{g}{2}\cdot t^2$.



Akkor ér ismét a lejtőre, amikor $s_x=s_y$, vagyis $vt=\frac{g}{2}\cdot t^2$, amiből $t=\frac{2v}{g}$. Ekkor az elmozdulás vízszintes komponense $s_x=\frac{2v^2}{g}$, ahonnan $AB=s_x\sqrt{2}=\frac{2\cdot 2gd\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{g}=8d$.

Nagy Béla (Nyíregyháza, Vasvári P. gimn. IV. o. t.)

II. megoldás: Vizsgálhatjuk a feladatot tetszőleges α szögű lejtő esetén. A golyó pályájának síkjában vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert az ábrán látható módon.



Ebben az AB egyenes egyenlete: $y=-\mathrm{tg}\alpha\cdot \mathrm{x}$. A golyó szabadesés útján szerzett sebessége az A pontban $v=\sqrt{2\cdot AP\cdot g}=\sqrt{\frac{2}{\cos\alpha}dg}$. Az ütközés után ferde (ill. vízszintes) hajítás jön létre v nagyságú kezdősebességgel, iránya a rugalmas ütközés törvényei szerint a függőlegessel 2α szöget alkot. Tehát a kezdősebesség vízszintes irányú komponense $v_x=v\sin 2\alpha$, függőleges irányú komponense $v_y=v\cos 2\alpha$ ($\alpha>45°$ esetén is előjel szerint helyesek ezen értékek). Az ütközés után t idővel a golyó helyének koordinátái

$$x=v_xt=vt\sin 2\alpha, \tag{1}$$

$$y=v_yt-\frac{g}{2}t^2=vt\cos 2\alpha-\frac{g}{2}t^2. \tag{2}$$

(1)-ből $t=\frac{x}{v\sin 2\alpha}$, továbbá $v=\sqrt{\frac{2}{\cos\alpha}\mathrm{dg}}$ felhasználásával a pálya egyenlete:

$$y=\frac{v\cos 2\alpha}{v\sin 2\alpha}x-\frac{g}{2\cdot\frac{2}{\cos\alpha}dg\sin^2 2\alpha}\cdot x^2=-x^2\frac{1}{16d\sin^2\alpha\cos\alpha}+x\,\mathrm{ctg}\,2\alpha.$$

Így meghatározhatjuk a pálya és az AB egyenes metszéspontját:

$$-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot x=-x^2\frac{1}{16d\sin^2\alpha\cos\alpha}+x\,\mathrm{ctg}\,2\alpha,\quad \text{ahonnan}\,(x\neq 0)$$

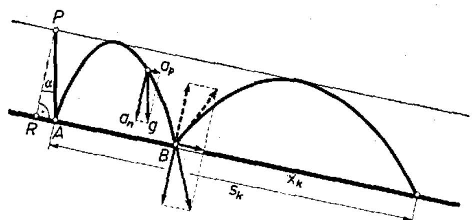
$$x=16d\sin^2\alpha\cos\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,2\alpha)=16d\,\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)=8d\,\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Tehát $AB = \dfrac{x}{\cos\alpha} = 8d\,\mathrm{tg}\,\alpha$, ezért $\alpha = 45^\circ$ esetén $AB = 8d$.

Mezey Ferenc (Budapest, II. Rákóczi F. gimn. IV. o. t.)

III. megoldás: Bontsuk föl a golyó gyorsulás- és sebességvektorát a lejtőre merőleges és azzal párhuzamos összetevőre. Tetszőleges α hajlásszöge lejtő esetén a gyorsulás normális irányú komponense $a_n = g\cos\alpha$, a lejtő síkjával párhuzamos komponense $a_p = g\sin\alpha$ (az ütközési pillanatok kivételével). Ütközéskor a sebesség lejtővel párhuzamos irányú komponense nem változik, arra merőleges összetevője pedig csupán irányt változtat. Ezért a golyónak a lejtővel párhuzamos elmozdulás-komponense az indítástól számított t idő múlva

$$s_p = a_p t = g\,t\sin\alpha.$$



A lejtőre merőleges irányú komponenst vizsgálva: először a test $a_n = g\,\cos\alpha$ gyorsulással halad d távolságon a lejtő felé, így a lejtőt $t_0 = \sqrt{\dfrac{2d}{a_n}} = \sqrt{\dfrac{2d}{g\cos\alpha}}$ idő alatt éri el. Mivel a gyorsulás változatlan és a sebesség csak irányt változtat, éppen t_0 idő alatt teszi meg az utat a lejtőtől a holtpontig, mely a lejtőtől nyilván d távolságra van. Így az első ütközés t_0 időpillanatban, a második $t_0 + 2t_0 = 3t_0$, a k-adik $t_0 + 2t_0\,(k-1) = (2k-1)\,t_0$ időpillanatban következik be az indulástól számítva. Ezért a k-adik pattanási helynek R-től való távolsága

$$s_k = \frac{a_p}{2}\big[(2k-1)t_0\big]^2 = \frac{g\sin\alpha}{2}(2k-1)^2\frac{2d}{g\cos\alpha} = (2k-1)^2 d\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

amiből a k-adik és a $(k+1)$-edik pattanási hely távolsága

$$x_k\big[2(k+1)-1\big]^2 d\,\mathrm{tg}\,\alpha - (2k-1)^2 d\,\mathrm{tg}\,\alpha = \big[(2k+1)^2 - (2k-1)^2\big] d\,\mathrm{tg}\,\alpha = 8k\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot d.$$

A $k=1$, $\alpha = 45^\circ$ helyettesítéssel a kívánt eredményt kapjuk.

Mezey Ferenc (Budapest, II. Rákóczi F. gimn. IV. o. t.)