I. Megoldás. Ha $n > 1$ és a baloldali összegben, $\frac{1}{n+1}$-től kezdve minden nevező helyébe a nála nagyobb n^2-t tesszük, akkor mindegyik tört értéke kisebb lesz és így

$$f(n) \equiv \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Minthogy az $\frac{1}{n}$-t követő tagok száma $n^2 - n$,

$$f(n) > \frac{1}{n} + \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n},$$
$$f(n) > 1.$$

Gantner Jenő (Szent-István g. VII. o. Bp. XIV.).

II. Megoldás. $f(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, mert $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

$$f(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{9} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{9}$$
$$f(3) > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{9} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

azaz $$f(3) > f(2).$$

Kimutatjuk általában, hogy $f(n+1) > f(n)$.

Ugyanis $$f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

$$f(n+1) = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) + \left[\frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}\right] =$$
$$= f(n) - \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}\right].$$

A szögletes zárójelben foglalt összeget kisebbítjük, ha minden tagjában a legnagyobb nevezőt, $(n+1)^2$-t vesszük; a tagok száma pedig $(n-+1)^2 - n^2$. Eszerint

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n+1)^2}.$$

Ezen kisebbítéssel azonban még mindig $\frac{1}{n}$-nél többet kapunk, ha $n > 1$. T. i.

$$\frac{2n+1}{(n+1)^2} > \frac{1}{n}, \quad \text{ill.} \quad 2n^2 + n > n^2 + 2n + 1, \quad \text{mert} \quad n(n-1) > 1,$$

ha $n > 1$.Tehát

$$f(n+1) > f(n) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad \text{azaz} \quad f(n+1) > f(n).$$

Kimondhatjuk tehát, hogy $f(n)$ az n-nel monoton növekedő; mivel $f(2) > 1$, egyszersmind $f(n) > 1$.

Taksony György (Ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

III. Megoldás. Bontsuk az $f(n)$ összeg azon részét, mely $\frac{1}{n}$-t követi, részletösszegekre; ezek mindegyikét kisebbítjük, ha mindegyik helyébe a legkisebbiket (utolsót) vesszük. Ezen részletösszegek mindegyikében a tagok száma n, Tehát:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} > n\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} > n\frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(n-1)n+1} + \frac{1}{(n-1)n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Eszerint

$$f(n) > \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} > n\frac{1}{n} = 1.$$

Haraszthy András (Szent László g. VI. o. Bp. X.)