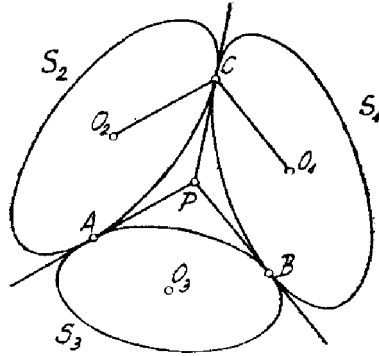


Előrebocsátjuk, hogy a kör érintője a kör síkjában fekszik. Ha két érintkező kör nem fekszik egy síkban, akkor közös érintőjük a két kör síkjának metszési vonala.

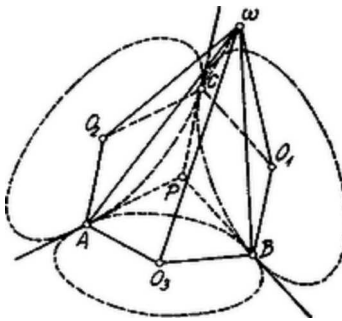
a) Ha a három kör közül kettő,  $k_1$  és  $k_2$  egy síkban ( $S$ ) fekszik, akkor a harmadik kör,  $k_3$  is az  $S$  síkban fekszik.

Ugyanis  $k_1$  és  $k_3$  közös érintője az  $S$ ,  $k_2$  és  $k_3$  közös érintője is az  $S$  síkban fekszik. Ezen két érintő meghatározza a  $k_3$  síkját, azaz  $S$ -t.

b) Ha két kör nem fekszik egy síkban, akkor a harmadik sem fekéldhetik az előbbieket egyikével sem egy síkban, ha a három érintkezési pont különböző: a három kör,  $k_1, k_2, k_3$  ( $O_1, O_2, O_3$  középpontokkal) a különböző  $S_1, S_2, S_3$  síkokban fekszik. Két kör közös érintője síkjuknak metszésvonala; a három közös érintő egy triéder élei. A triéder csúcsa legyen  $P$ .

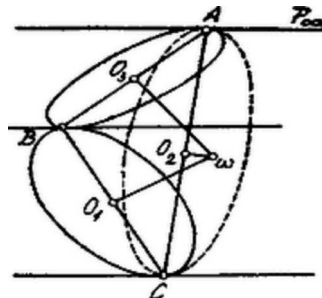


A  $k_1$  és  $k_2$  körök érintési pontja legyen  $C$ , a  $k_2$  és  $k_3$  köröké  $A$ , a  $k_3$  és  $k_1$  köröké  $B$ . Az  $O_1C$  és  $O_2C$  sugarak meghatároznak egy  $\Sigma_3$  síkot, mely a  $PC$  közös érintőre merőleges.<sup>1</sup> Ha a  $\Sigma_3$  síkban  $O_1C$ -re az  $O_1$ -ben és  $O_2C$ -re az  $O_2$ -ben merőlegest állítunk, ezek egy  $\omega$  pontban metszik egymást. Már most  $O_1\omega \perp S_1$ ,  $O_2\omega \perp S_2$ ,<sup>2</sup> tehát  $\omega$  a  $k_1$  és  $k_2$  körök minden pontjától egyenlő távolságban van:  $\omega$  oly gömb középpontja, melynek gömbi körei  $k_1$  és  $k_2$ . A gömb sugara  $\omega C = \omega B = \omega A = R$ .



Már most az  $O_1BO_3 \equiv \Sigma_2$  síkban az  $O_3$  pontban,  $S_3$ -ra merőleges egyenesnek metszenie kell az  $O_1\omega$  egyenest; az  $O_2AO_3 \equiv \Sigma_1$  síkban az  $O_3$  pontban,  $S_3$ -ra merőleges egyenesnek metszenie kell az  $O_2\omega$  egyenest. Ez csak úgy lehetséges, ha  $O_1\omega$ -t és  $O_2\omega$ -t éppen az  $\omega$ -ban metszi,<sup>3</sup> azaz  $\omega$  a  $k_3$  kör minden pontjától  $\omega B = \omega A = R$  távolságban van. Eszerint  $k_1, k_2, k_3$  körök az  $(\omega, R)$  gömbön fekszenek. Az  $\omega$  a  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  síkoknak közös pontja; oly triéder csúcsa, melynek élei  $\omega O_1, \omega O_2, \omega O_3$ .

c) Ha  $P$  a végtelenben van, akkor a triéder éleiként szereplő közös érintők párhuzamosak (egy hasábos tér élei).



<sup>1</sup> Ugyanis  $O_1C \perp PC$  és  $O_2C \perp PC$ .

<sup>2</sup>  $O_1\omega \perp S_1$ , mert:  $\Sigma_3 \perp PC$ , tehát  $PC$  merőleges a  $\Sigma_3$  síkban fekvő bármely egyenesre; így  $O_1\omega \perp PC$  és  $O_1\omega \perp O_1C$ . Hasonlóan következik:  $O_2\omega \perp S_2$ .

<sup>3</sup> Ha az  $e_3$  egyenes, mely nem fekszik az  $e_1$  és  $e_2$  egymást metsző egyenesek síkjában, metszi úgy az  $e_1$ -et, mint az  $e_2$ -t, akkor  $e_3$  az  $e_1$  és  $e_2$  metszéspontján megy keresztül.

Egy kör két érintője akkor párhuzamos, ha az érintési pontok egy átmérő végpontjai. Jelen esetben tehát az  $ABC\Delta$  oldalai a  $k_1, k_2, k_3$  körök átmérői; a  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  síkok összeesnek az  $ABC\Delta$  síkjával, tehát  $\omega$  is ezen síkban van és nem más, mint az  $ABC\Delta$  köré írt kör középpontja.

*Weisz A.*