

I. Megoldás. Legyen

$$(1) \quad x + y - 1 = k, \quad \text{tehát} \quad x + y - 2 = k - 1 \dots$$

és vizsgáljuk az adott a számnak a

$$(2) \quad \frac{k(k-1)}{2} \dots$$

alakú egész számok sorához viszonyított helyzetét.¹

Két eset lehetséges: a vagy előfordul ezen számok sorában, vagy a számsor két tagja között van.

Az első esetben a k poz. egész szám megállapítható úgy, hogy

$$a = \frac{(k+1)k}{2}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{(k+1)k}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = k$$

és ekkor, mivel $x + y - 1 = k$, $x = k$ mellett $y = 1$, tehát egyenletünket a $(k, 1)$ számpár kielégíti.

A második esetben k meghatározható úgy, hogy

$$(3) \quad \frac{k(k-1)}{2} < a < \frac{(k+1)k}{2}, \dots$$

és ekkor

$$0 < x < k, \quad \text{t.i.} \quad x = a - \frac{k(k-1)}{2} = \alpha,$$

azaz létezik egy $x = \alpha$ poz. egész szám úgy, hogy $1 \leq \alpha < k$,

és így

$$y = k + 1 - \alpha > 0,$$

egyenletünket tehát az $(a, \overline{k+1-\alpha})$ számpár elégíti ki.

A két eset egybefoglalásával mondhatjuk: $1 \leq \alpha \leq k$.

Már most azt kell kimutatnunk, hogy egyenletünket több pozitív egész számokból álló számpár nem elégítheti ki.

Nézzük tehát az a számnak a 2) sorozat azon tagjaihoz való helyzetét, melyek $\frac{k(k-1)}{2}$ -t megelőzik!¹ Így

$$a = \frac{k(k-1)}{2} + \alpha = \frac{(k-1)(k-2)}{2} + k - 1 + \alpha,$$

azaz most

$$x = k - 1 + \alpha > 0;$$

azonban, mivel

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= k - 1, \\ y = k - x &= k - (k - 1 + \alpha) = 1 - \alpha \leq 0, \end{aligned}$$

tehát már nem kapunk *pozitív* y -t.

Általában, mivel

$$\begin{aligned} a &= \frac{k(k-1)}{2} + \alpha = \frac{(k-i)(k-i-1)}{2} + \alpha + (k-1) + (k-2) + \dots + (k-i) \\ &\quad \text{és} \quad i < k, \end{aligned}$$

azért

$$x = \alpha + ik - \frac{i(i+1)}{2} > 0.$$

Azonban most

$$x + y - 1 = k - i,$$

tehát

$$\begin{aligned} y &= 1 + (k-i) - x = 1 + (k-i) - \alpha - ik + \frac{i(i+1)}{2}, \\ y &= 1 - \alpha - (i-1) \left(k - \frac{i}{2} \right) < 0. \end{aligned}$$

¹E sorozat tagjai: 0, 1, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 ...

másodrendű számtani haladványt alkotnak, az egymásután következő tagok különbségei 1, 2, 3, 4, 5, ... elsőrendű számtani haladványt.

¹Ha azokat tekintjük, amelyek $\frac{k(k-1)}{2}$ után következnek, akkor már $x < 0$.

II. Megoldás. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a pozitív egész x, y számokból (x, y) számpár összes lehetséges változatainak megfelelő rendezésével

$$f(x, y) \equiv x + \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2}$$

kifejezés a pozitív számsor összes egész számait adja, 1-től kezdődőleg, egyszer és csak egyszer, akkor bebizonyítottuk, hogy mindig van egy és csakis egy pozitív egész (x, y) számokból álló (x, y) számpár, amely a követelménynek megfelel. Legyen ugyanis $x + y = c$, állandó, akkor $f(x, y) = a$ csak az x -től függ úgy, hogy amint x növekedik egy-egy egységgel, úgy növekedik a is egy-egy egységgel. Tehát az (x, y) számpár ama változataihoz, melyek az $x + y = c$ feltételnek megfelelnek, a pozitív egész számsor egymásután következő tagjainak egy bizonyos része felel meg egyszer és csak egyszer.¹

Ha bebizonyítjuk, hogy az (x, y) számpár változatainak következő csoportjához, amelyre nézve $x + y = c + 1$, a pozitív egész számsornak az előbbieket közvetlenül követő csoportja felel meg, akkor beláthatjuk, hogy ha az (x, y) számpár változatait így rendszerezve helyettesítjük $f(x, y)$ kifejezésbe, akkor valóban a pozitív egész számok teljes sorát kapjuk, egymásután, egyszer és csak egyszer, 1-től kezdődőleg. Ugyanis, ha $x = 1, y = 1$, akkor $a = 1$.

Az $x + y = c$ csoport utolsó számpárja az $x = 1, 2, \dots, c - 1$ sorrendben haladva $(c - 1, 1)$. $x > c$ nem lehet, mert akkor $y \leq 0$. A következő $x + y = c + 1$ csoport első számpárja $(1, c)$.

A $(c - 1, 1)$ számpárral

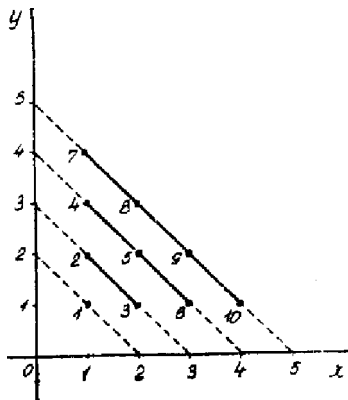
$$f(x, y) = c - 1 + \frac{(c - 1)(c - 2)}{2}, \text{ azaz } a_1 = \frac{c^2 - c}{2}.$$

Az $(1, c)$ számpárral

$$f(x, y) = 1 + \frac{c(c - 1)}{2} \text{ azaz } a_2 = 1 + \frac{c^2 - c}{2}$$

tehát

$$a_2 = a_1 + 1.$$



Látjuk ebből, hogy az $x + y = c$ csoport utolsó számpárjának megfelelő egész szám a_1 és az utána következő egész szám, a_2 , tényleg a következő csoport első (x, y) számpárjához tartozó szám.

Ezzel tehát állításunkat bebizonyítottuk. Minthogy $x + y = c$ oly egyenesnek egyenlete, mely a tengelyekről c darabot vág le, ezen egyenesek mentén fekszenek az (x, y) számpárokhoz tartozó a egész számok. A kezdő szám $a = 1$ az $x + y = 2$ egyenesen fekszik. Az $x + y = c$ egyenesnek a tengelyeken fekvő pontjai már nem határoznak meg a számot.

Weisz Alfréd (Bolyai r. VII. o. Bp. V.)

¹ Ezen tagok száma: $c - 1$, mert, ha $x + y = c$, akkor $x = 1, 2, \dots, c - 1$