

Egyenletünk baloldalán álló négyzetgyökök x valós értékű függvényei, ha

$$2x + 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x + 1 \geq 0, \quad \text{azaz ha} \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{ill.} \quad x \geq -1.$$

E két feltételt együttesen kielégíti

$$(1) \quad x \geq -\frac{1}{2} \dots$$

Az adott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, keletkezik

$$(2) \quad 2x + 1 + 2\sqrt{(2x + 1)(x + 1)} + x + 1 = 1 \quad \text{vagy} \quad 2\sqrt{(2x + 1)(x + 1)} = -3x - 1 \dots$$

A (2) baloldalán pozitív szám áll; kell, hogy a jobboldal is pozitív legyen, tehát

$$(3) \quad -3x - 1 > 0, \quad \text{ill.} \quad x < -\frac{1}{3} \dots$$

Az (1) és (3) alatti feltételek összefoglalásával

$$(4) \quad -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \dots$$

Most már a (2) mindkét oldalán négyzetre emelve:

$$(5) \quad 4(2x^2 + 3x + 1) = 9x^2 + 6x + 1 \quad \text{vagyis} \quad x^2 - 6x - 3 = 0 \dots$$

(5) megoldása

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = 3 \pm \sqrt{12} = 3 \pm 2\sqrt{3}.$$

Ezen két érték közül csak a negatív felelhet meg az eredeti egyenletnek: $x' = 3 - 2\sqrt{3}$. Ezen érték kielégíti a (4) feltételt; ugyanis

$$-\frac{1}{2} < 3 - 2\sqrt{3} \sim -0,464 < -\frac{1}{3}.$$

Helyettesítsük be x' ezen értékét az eredeti egyenletbe:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1.$$

Taksony Károly (Ág. ev. g. VI. o. Bp.)

Kiegészítés. Az (5) egyenlet másik gyöke, t. i. $x'' = 3 + 2\sqrt{3}$, a

$$(6) \quad \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1} = 1 \dots$$

egyenletet elégíti ki. Ugyanis

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) = 1.$$

Ha a (6) egyenlet mindkét oldalán négyzetre emelünk, akkor

$$-2\sqrt{(2x + 1)(x + 1)} = -3x - 1.$$

Ha itt újra négyzetre emelünk, akkor is az (5) egyenlethez jutunk.