

Az $f(x) = 0$ és $f(y) = 0$ egyenlet gyökei megegyeznek, ha a megfelelő együtthatók viszonya egyenlő, azaz

$$(1) \quad \frac{1+p+q}{1} = \frac{2(1-q)}{p} = \frac{1-p+q}{q} \dots$$

Ha ezen arányok egyenlők, akkor értékük megegyezik a két szélső számláló összegének és a nevező összegének arányával és ez

$$\frac{1+p+q+1-p+q}{1+q} = \frac{2(1+q)}{1+q} = 2 \quad \text{hacsak} \quad q \neq 1.$$

Ezek szerint: $1+p+q=2$, és 1)-ből $1-q=p$, $1-p=q$.

Mind a három ugyanazt mondja, t. i. $p+q=1 \dots$

Ekkor valóban: $1+(p+q)=2$; $2(1-q)=2p$

és $1-p+q=p+q-p+q=2q$,

azaz az $f(y)=0$ egyenlet együtthatói az $f(x)=0$ egyenlet megfelelő együtthatóinak kétszeresei.

Vizsgáljuk még meg a $q=-1$ esetet is. Ekkor az (1) alatti arányokból:

$$\frac{p}{1} = \frac{4}{p} = \frac{-p}{-1}.$$

Innen

$$p^2 = 4, \quad \text{azaz} \quad p = +2.$$

$p = +2$ mellett $f_1(x) \equiv x^2 + 2x - 1 = 0$ és $f_1(y) \equiv 2y^2 + 4y - 2 = 0$

$p = -2$ „ $f_2(x) \equiv x^2 - 2x - 1 = 0$ és $f_2(y) \equiv -2y^2 + 4y + 2 = 0$.

Látható, hogy a $q=-1$, $p=\pm 2$ esetekben is az

$$f_1(x) = 0 \quad \text{és} \quad f_1(y) = 0 \quad \text{ill. az} \quad f_2(x) = 0 \quad \text{és} \quad f_2(y) = 0$$

egyenletek gyökei megegyeznek. A $p = +2$, $q = -1$ eset beletartozik az általános $p+q=1$ összefüggés keretébe.