

A szóban forgó összeget, közös nevezővel,

$$f(n) \equiv \frac{n^5 + 5n^3 + 4n}{120} = \frac{n(n^2 + 1)(n^2 + 4)}{120}$$

alakban írhatjuk. Tekintettel arra, hogy $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, akkor lesz $f(n)$ egész szám, ha a számláló osztható 2^3 , 3 , 5 törzsszám-hatványokkal.

a) Oszthatóság 2^3 -ével. Ha n páros szám, n^2 és így $n^2 + 4$ is a 4 többszöröse, tehát $n(n^2 + 4)$ osztható 2^3 -ével. Ha n páratlan, n^2 és $n^2 + 4$ is az. Most $n^2 + 1$ páros, de

$$n^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 2k + 2$$

csak 2 -vel osztható.

Hogy $f(n)$ egész szám legyen, szükséges, hogy n páros szám legyen

b) Oszthatóság 3 -mal. Ha $n = 3m$, akkor $f(n)$ számlálója osztható 3 -mal.

Ha azonban $n = 3m \pm 1$, akkor

$$n^2 + 1 = 9m^2 \pm 6m + 2 \quad \text{és} \quad n^2 + 4 = 9m^2 \pm 6m + 5,$$

tehát a számláló egyik tényezője sem osztható 3 -mal.

Hogy $f(n)$ egész szám legyen, szükséges, hogy n többszöröse legyen 3 -nak.

c) Oszthatóság 5 -tel. Ha $n = 5m$, akkor a számláló is osztható 5 -tel.

Ha $n = 5m \pm 1$, akkor $n^2 + 4 = 25m^2 \pm 10m + 5$,

ha $n = 5m \pm 2$, akkor $n^2 + 1 = 25m^2 \pm 10m + 5$

többszöröse 5 -nek. Eszerint a számláló n bármely értéke mellett osztható 5 -tel.

Összefoglalva: hogy $f(n)$ egész szám legyen, szükséges és elegendő, hogy n többszöröse legyen 2 -nek és 3 -nak, tehát 6 -nak is.

Császár Ákos (Érseki g. V. o. Bp. II.)