

Az x^2 -re másodfokú $x^4 - 2ax^2 + b^2 = 0$ egyenlet megoldása:

$$x^2 = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{ill.} \quad x = \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Itt x -re négy értéket kaptunk; mindegyik összetett négyzetgyök. Elegendő, ha csak az egyiket állítjuk elő, mint két egyszerű négyzetgyök összegét. Legyen tehát

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{u} + \sqrt{v} \quad \text{és így} \quad a + \sqrt{a^2 - b^2} = u + v + 2\sqrt{uv}.$$

Utóbbi egyenlet csak úgy állhat meg, ha

$$u + v = a \quad \text{és} \quad 2\sqrt{uv} = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{vagy} \quad uv = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

Eszerint

$$u \text{ és } v \text{ a } z^2 - az + \frac{a^2 - b^2}{4} = 0$$

egyenlet gyökei:

$$u = z_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 - 4 \frac{a^2 - b^2}{4}} \right) = \frac{1}{2}(a + b)$$
$$v = z_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{4}} \right) = \frac{1}{2}(a - b).$$

Vagy pedig $u = z_2$ és $v = z_1$. Az u és v felcserélése által nem kapunk különböző megoldásokat és így

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Hasonlóan:

$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Az egyenlet gyökei:

$$x = \pm \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}} \right).$$

Komlós Judit (Szent-Erzsébet leányg. V. o. Pécs)