I. Megoldás. Legyen

$$\sqrt[3]{25+5\sqrt{20}}=x, \qquad \sqrt[3]{25-5\sqrt{20}}=y,$$

tehát

$$x^3+y^3=25+5\sqrt{20}+25-5\sqrt{20}=50\ldots \tag{1}$$

és

$$xy=\sqrt[3]{25^2-25\cdot 20}=\sqrt[3]{125}=5\ldots \tag{2}$$

Azonban

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(x+y)^3-15(x+y)=50,$$

azaz

$$x+y=u \quad \text{az} \quad u^3-15u-50=0\ldots \tag{3}$$

egyenlet gyöke. Minthogy

$$u^3-15u-50=(u-5)(u^2+5u+10),$$

valóban

$$u-5=0 \quad \text{azaz} \quad u=5.$$

Az $u^2+5u+10=0$ egyenlet gyökei komplex számok; de a két köbgyök és így összegük is valós.

Huhn László (Kegyesrendi g. VI. o. Szeged.).

II. Megoldás. Az előbbi megoldás jelölését megtartva, tegyük fel, hogy

$$x+y=5.$$

Láttuk, hogy

$$xy=5.$$

Így x és y az $u^2-5u+5=0$ egyenlet gyökei:

$$u_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \quad u_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Valóban

$$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^3=25+10\sqrt{5}=25+5\sqrt{20},$$

$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^3=25-10\sqrt{5}=25-5\sqrt{20},$$

tehát

$$\sqrt[3]{25+5\sqrt{20}}+\sqrt[3]{25-5\sqrt{20}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\frac{5-\sqrt{5}}{2}=5.$$

Böröcz Imre (Ciszterci Szent-Imre g. VI. o. Bp XI.)