

Tekintsük a következő kifejezéseket:

$$f_1 = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{4x}{a} - \frac{2c}{b}}$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{x}{a} - \frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{4x}{a} - \frac{2c}{b}}.$$

Minthogy valós értékű négyzetgyököket veszünk figyelembe, f_1 és f_2 egy időben valósak. Azonban f_1 pozitív, míg $f_2 = 0$ is lehet, és éppen az a kérdés, hogy x mely értékénél lesz $f_2 = 0$? Ha $f_2 = 0$, akkor $f_1 f_2 = 0$ és megfordítva: ha $f_1 f_2 = 0$, akkor $f_2 = 0$ (mert $f_1 > 0$). Eszerint az $f_2 = 0$ egyenlet aequivalens az

$$f_1 f_2 = \frac{x}{a} + \frac{c}{b} + \frac{x}{a} - \frac{c}{b} + 2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}} - \left(\frac{4x}{a} - \frac{2c}{b}\right) = 0$$

egyenlettel, vagy rendezve:

$$f_1 f_2 = -\frac{2x}{a} + \frac{2c}{b} + 2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2}} = 0,$$

ill.

$$f_1 f_2 = 2 \left[\sqrt{\left(\frac{x}{a} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{c}{b}\right)} - \left(\frac{x}{a} - \frac{c}{b}\right) \right] = 0.$$

Ha $\frac{x}{a} - \frac{c}{b} < 0$, akkor a baloldalon pozitív tagok állanak, összegük nem lehet zérus; az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $\frac{x}{a} - \frac{c}{b} > 0$, akkor

$$f_1 f_2 = 2\sqrt{\frac{x}{a} - \frac{c}{b}} \left(\sqrt{\frac{x}{a} + \frac{c}{b}} - \sqrt{\frac{x}{a} - \frac{c}{b}} \right) = 0.$$

1⁰. $f_1 f_2 = 0$, ha $\frac{x}{a} - \frac{c}{b} = 0$; ekkor $f_2 = 0$, de $f_1 \neq 0$ és $x = \frac{ac}{b}$.

T. i., ha $\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$, akkor $f_2 = \sqrt{\frac{2c}{b}} - \sqrt{\frac{2c}{b}} = 0$,

míg

$$f_1 = \sqrt{\frac{2c}{b}} + \sqrt{\frac{2c}{b}} = 2\sqrt{\frac{2c}{b}}.$$

2⁰. $f_1 f_2 = 0$, ha $\sqrt{\frac{x}{a} + \frac{c}{b}} = \sqrt{\frac{x}{a} - \frac{c}{b}}$.

Ezen egyenlőség azonossággá válik, ha $\frac{c}{b} = 0$, és így $f_2 = 0$ az x bármely értékénél, míg $f_1 = 4\sqrt{\frac{x}{a}}$. Azonban, ha $\frac{c}{b} \neq 0$, ellenmondást tartalmaz és nem szolgáltat véges megoldást.

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VI. o. Bp. V.)