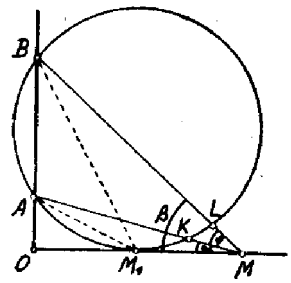
Legyen $OMA\sphericalangle = \alpha$, $OMB\sphericalangle = \beta$ és $AMB\sphericalangle = \varphi$, Ekkor

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{x}, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{b}{x}.$$



Helyettesítve ezeket $\mathrm{tg}\varphi$ értékébe:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{(b-a)x}{x^2+ab}.$$

Rendezzük ezen összefüggést x szerint:

$$\mathrm{tg}\varphi \cdot x^2 - (b-a)x + ab\mathrm{tg}\varphi = 0.$$

Valós megoldást kapunk, ha

$$(b-a)^2 - 4ab\mathrm{tg}^2\varphi \geqq 0, \quad \text{ill.} \quad 0 < \mathrm{tg}\varphi \leqq \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

Eszerint $\mathrm{tg}\varphi$ legnagyobb értéke: $\mathrm{tg}\varphi_m = \dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$

és az ehhez tartozó x érték: $\dfrac{b-a}{2\mathrm{tg}\varphi_m} = \sqrt{ab}$.

Steiner Iván (Toldy Ferenc g. VI. o. Bp. II.)

I. Jegyzet. $\mathrm{tg}\varphi$ írható: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{b-a}{x+\dfrac{ab}{x}}$.

$\mathrm{tg}\varphi$ értéke legnagyobb, ha a nevező értéke a legkisebb. A nevező két tagjának szorzata: ab, állandó; a két tag összege legkisebb, ha egyenlők, ha tehát $x = \dfrac{ab}{x}$, ill. $x^2 = ab$.

T. i. $$\left(x+\frac{ab}{x}\right)^2 = \left(x-\frac{ab}{x}\right)^2 + 4ab.$$

$$x+\frac{ab}{x} \text{ értéke legkisebb, ha } x-\frac{ab}{x} = 0, \text{ azaz } x^2 = ab.$$

II. Jegyzet. Ezen megoldás geometriai jelentése alapján oly kört kell szerkesztenünk, mely keresztülmegy az A és B pontokon, az OX egyenest pedig érinti. Az M_1 érintési pontra nézve

$$\overline{OM}_1^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \quad \text{azaz} \quad x^2 = ab.$$

Szerkesszük meg ezen kört és vegyünk fel az OX egyenesen egy – M_1-től különböző M pontot. Most az $AMB\sphericalangle$ a körre nézve ú. n. külső excentrikus szög, amely kisebb az AM_1B kerületi szögnél (Utóbbi mértéke az $\widehat{AB}$ ív fele, előbbié $\frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{KL})$.