

I. Megoldás. (1) szerint adva van a két ismeretlen összege. Vegyük hozzá az ismeretlenek különbségét, úgy hogy $x - y = 2z$ legyen. Ha z -t meghatároztuk, akkor x és y egyszerűen számítható.

$$(1) \quad x + y = 2a \dots$$

és

$$(3) \quad x - y = 2z \dots$$

alapján

$$x = a + z, \quad y = a - z.$$

Helyettesítve ezeket (2)-be:

$$(a^2 - z^2)[(a + z)^2 + (a - z)^2] = 2b^4, \quad \text{ill.} \quad (a^2 - z^2)2(a^2 + z^2) = 2b^4.$$

Tehát:

$$(4) \quad a^4 - z^4 = b^4 \quad \text{és} \quad z = \pm \sqrt[4]{a^4 - b^4} \dots$$

x értéke és így x, y is valós, ha $a^4 \geq b^4$ vagy $a^2 \geq b^2$.

Eszerint

$$(5) \quad x = a + \sqrt[4]{a^4 - b^4}, \quad y = a - \sqrt[4]{a^4 - b^4} \dots$$

x és y ezen értékei felcserélhetők. (Szimmetrikus egyenletrendszerrel van dolgunk!)

A megadott numerikus értékekkel:

$$x = 10 + \sqrt[4]{10000 - 9375} = 10 + \sqrt[4]{625} = 15 \quad \text{és} \quad y = 5,$$

vagy pedig

$$x = 5 \quad \text{és} \quad y = 15.$$

Baán Sándor (Bencés g. VI. o. Kőszeg).

II. Megoldás. A (2) egyenlet írható így is:

$$xy[(x + y)^2 - 2xy] = xy(4a^2 - 2xy) = 2b^4.$$

$$(6) \quad \text{Ha most } xy = u, \quad \text{akkor} \quad u^2 - 2a^2u + b^4 = 0 \dots$$

Ezen egyenlet gyökei valósak, ha $a^4 - b^4 \geq 0$, azaz $a^2 \geq b^2$.

(6)-ból

$$u = xy = a^2 \pm \sqrt{a^4 - b^4}.$$

Eszerint x és y a következő egyenletek gyökei:

$$(7) \quad X^2 - 2aX + u_1 = 0 \dots$$

$$(8) \quad X^2 - 2aX + u_2 = 0 \dots$$

ahol

$$u_1 = a^2 + \sqrt{a^4 - b^4} \quad \text{és} \quad u_2 = a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}.$$

A (7) gyökei nem valósak, mert

$$a^2 - u_1 = a^2 - a^2 - \sqrt{a^4 - b^4} = -\sqrt{a^4 - b^4} < 0.$$

A (8) gyökei azonban valósak, mert $a^2 - u_2 = \sqrt{a^4 - b^4} > 0$.

A (8) gyökei $x_{1,2} = a \pm \sqrt{\sqrt{a^4 - b^4}} = a \pm \sqrt{a^4 - b^4}$.

Ha $X_1 = x$, akkor $X_2 = y$, ill. $X_1 = y$, $X_2 = x$.

A numerikus értékeket l. az I. megoldásban.

Pfeifer Béla (Izr. g. V.o. Bp.).

Jegyzet: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \geq 0$, ha $a^2 - b^2 \geq 0$. Ugyanis $a^2 + b^2 \geq 0$, hacsak a és b valós számok.

$$a^2 - b^2 \geq 0 \quad \text{ha} \quad |a| \geq |b|.$$